Der Geist

der

mathematischen Analysis

und

ihr Verhältniß zur Schule

von

Professor Dr. Martin Ohm.

Zweite Abhandlung.

Auch als Anhang und Kommentar zu seinen verschiedenen Lehrbüchern.

Mit einer Figuren-Tafel.

Erlangen.

Verlag von Carl Heyder.

1846.

Vorrede.

In dem 1842 erschienenen „Geist der mathematischen Analysis“ *) habe ich es versucht, den innern wissenschaftlichen Zusammenhang der Lehren der Elementar-Analysis kurz hervorzuheben. Denselben Zweck hat die gegenwärtige „Abhandlung“ in Bezug auf die Differential- und Integral-Rechnung, welche daher in Bezug auf jene die „zweite“ genannt werden kann. Im Verlaufe dieser gegenwärtigen ist daher jene allemal als „Erste Abhandlung“ citirt. — Da der Vfr. auch für Leser schreibt, die sich nicht gerade ausschließlich mit Mathematik beschäftigen, die aber mit der Wissenschaft Schritt zu halten wünschen, so ist hie und da Sorgfalt angewandt worden, durch nähere Erörterungen, durch kurze Ausfüllung von Lücken ein leichteres Verständniß zu vermitteln, was andere Leser für überflüssig halten müssen. Ein Schriftsteller muß suchen in dieser Hinsicht die rechte Mitte zu treffen.

In der „ersten Abhandlung“ (d. h. im „Geist der mathematischen Analysis“ Berlin 1842.) sind noch folgende Druck- und Redaktionsfehler zu verbessern:

---

*) Von dieser Abhandlung ist mir eine englische Uebersetzung zugekommen, welche den Titel führt: **Prof. Martin Ohm on mathematical Analysis and its relation to a logical System. Transl. from the German by Alex. John Ellis, B. A. (London, Parker. 1843.)**

pag. 84. Z. 1 v. u. muß es statt „unendlichen Gliedern" heißen „unendlich-vielen Gliedern";

pag. 86. Z. 20 v. o. müssen hinter den Worten „unendlich-groß" noch die Worte „oder unbestimmt" hinzugefügt werden.

Von der vorhin gedachten „Ersten Abhandlung" sind mir zwei Beurtheilungen zu Gesicht gekommen, die eine in den ehemaligen deutschen Jahrbüchern, welche meinen Ansichten das Wort redet; die andere in den „Jahrbüchern für wissenschaftliche Kritik" (August 1842. Nr. 27.) von Herrn Kummer (jetzt Professor der Mathematik an der Universität zu Breslau), welche ziemlich ungünstig für mich ausgefallen ist. Obgleich es nun für einen nur nach Wahrheit strebenden Schriftsteller Regel seyn muß, weder die günstigen noch die ungünstigen Recensionen mehr zu beachten als es gerade nöthig ist, um die etwa vorkommenden nützlichen Winke zu seinem Besten zu verwenden, — so giebt mir doch diese letztere Beurtheilung eine allzugünstige Gelegenheit, mich über mein Wollen und Streben auch einmal auf eine andere und vielleicht um so verständlichere Weise auszusprechen, als daß ich es hier versäumen dürfte, mir im alten und ehrenhaften Sinne eben der Jahrbücher für wissenschaftliche Kritik, von dieser Beurtheilung die Anhaltspunkte zu nehmen, um daran Betrachtungen und Bemerkungen zu knüpfen, welche vielleicht einige Stellen meiner Arbeiten sowie den Zweck derselben noch in näheres Licht zu stellen vermögen.

Herr K. fängt damit an (wenn wir von der den Titel meiner Schrift betreffenden Einleitung abstrahiren) zuzugeben, daß die Mathematiker bis weit in das gegenwärtige Jahrhundert herein nicht immer ganz strenge, also natürlich nicht immer ganz wissenschaftlich verfahren haben; er meint, daß bis zur angegebenen Zeit die mathematische Analysis auf der Stufe gestanden, auf welcher vor Kant die Philosophie, daß aber Gauß sich zuerst von solchen Fehlern ganz rein erhalten habe. Später heißt es:

„Wenn wir die angedeutete Analogie in der Entwicklung „der Philosophie und Mathematik etwas weiter verfolgen, so „fällt in die Augen, daß Ohm in seinem Systeme eine ähnliche „Rolle spielt, wie vormals Fichte in seiner Wissenschaftslehre, „nur muß man diese Vergleichung nicht zu weit ausdehnen, weil „der philosophische Gegensatz von Denken und Seyn ein wesent„lich anderer ist, als der Gegensatz von Form und Inhalt in „der Analysis."

Indem ich natürlich mit dem, was über Gauß gesagt ist, vollkommen übereinstimme, muß ich mich doch sehr entschieden gegen alles Uebrige aussprechen. Diese Vergleichungen zwischen den Bestrebungen in der mathematischen Analysis und denen in der Philosophie sind an sich schon ganz unstatthaft, besonders unstatthaft aber, so weit sie meine eigenen Arbeiten betreffen. Mein Streben ist nämlich zu keiner Zeit ein anderes gewesen, als für die mathematische Analysis, namentlich in Bezug auf ihre Begründung, dann aber auch in Bezug auf die von ihr gebrauchten Methoden, dieselben Gesetze der empirischen Logik in Anspruch zu nehmen, nach denen jeder Mensch denken muß, und nach denen er wirklich denkt, so oft er richtig denkt, er mag sich derselben bewußt geworden seyn oder nicht. Ich habe mich bestrebt und bestrebe mich fortdauernd, der mathematischen Analysis das traurige Privilegium zu entreißen, in ihren Elementen unrichtig denken, z. B. allgemeine Urtheile allgemein umkehren, oder besondere Wahrheiten als allgemeine ansehen, oder aus Begriffen Folgerungen ziehen zu dürfen, die in diesen nicht stecken. Mein Zweck ist vorzüglich ein pädagogischer und hat z. B. mit den Arbeiten eines Gauß, der die Grenzen der Analysis weiter hinausgerückt hat, höchstens das gemein, daß jeder bemüht gewesen ist, möglichst richtig zu denken. Aber eben deshalb wird man aus keiner der vielen und immer trefflichen Arbeiten des Gauß absehen können, wie derselbe die Elemente der Analysis sich gedacht habe, was

er von dem Imaginären halte, wie er das Negative ansehe u. s. w. f. Wenn daher Herr Kummer an einer andern Stelle seiner Beurtheilung sagt: „denn Ohm repräsentirt eine „besondere Richtung in der Entwicklung der mathematischen Ana„lysis, und zwar so ganz selbstständig, daß wohl kaum ein an„derer Mathematiker von einiger Bedeutung dieselbe Richtung „verfolgt" — so könnte ich sogar fragen, woher Herr K. wissen kann, ob nicht z. B. Gauß selbst diese Ohm'sche Richtung hat, oder doch bekommen würde, wenn derselbe mit der Grundlage der Analysis sich einmal ernstlich befassen wollte? — Denn kein wahrhaft scharfer Denker kann sich durch unseren Zustand der Elemente der mathematischen Analysis befriedigt fühlen, sobald er aus irgend einer Veranlassung sich einmal die Mühe giebt, auf die Begründung dieser Elemente, auf die einzelnen Begriffe sowie auf den Zusammenhang des Ganzen ein streng prüfendes Auge zu werfen. Hierüber kann nur und wird die Zeit entscheiden; vorläufig mache ich Herrn K. nur darauf aufmerksam, daß die Lehrbücher, in denen ich diese selbstständige Richtung niedergelegt habe, in Deutschland an vielen und bedeutenden Lehranstalten, oft von mir ganz unbekannten Lehrern dem mathematischen Unterrichte zu Grunde gelegt und in immer neuen Auflagen und in vielen Tausenden von Exemplarien in und außerhalb Deutschland verbreitet werden; immer Beweis genug, daß es noch viele Leute giebt, welche die Sache auch noch mit anderen und günstigeren Augen ansehen, und welche das Bessere nicht bloß deshalb verwerfen, weil es zugleich das Neue und Ungewohnte ist.

Wie wenig es aber Herrn K. gelungen ist, von dem, was ich anstrebe, eine Ahnung zu erhalten, beweist das, was er an meinen Arbeiten im Besonderen auszusetzen findet. Ich werde dies sehr anschaulich nachweisen.

Herr K. sagt: „Die allgemeine Definition der Addition „und Subtraktion giebt Ohm in folgenden Worten an:

„„„zu dem Ende versteht man unter Summe a + b oder
„„„a + b + c (ohne sich mehr um die Bedeutung der ein-
„„„zelnen Buchstaben zu bekümmern) die bloße Form, be-
„„„gabt mit der Eigenschaft, daß in ihr die Summanden
„„„in beliebiger Ordnung gedacht werden können; und
„„„unter Differenz a — b versteht man nun auch die bloße
„„„Form, begabt mit der Eigenschaft, daß man überall
„„„(a — b) + b mit a selbst vertauschen kann.““

„Das Unzulängliche der Bestimmung des Begriffes Summe „(sagt nun Herr K.) springt in die Augen; denn nach dieser „Definition müßte jeder Ausdruck, der a und b so enthält, daß „man sie mit einander vertauschen kann, also jede symmetrische „Funktion von a und b, eine Summe dieser beiden Summan-„den seyn, z. B. müßte auch das Produkt a·b zugleich die „Summe von a und b seyn, wenn gleich nur eine speciellere „Art der Summe, da das Produkt a·b außer der Eigenschaft, „daß sich a und b in demselben vertauschen lassen, noch eine „zweite bestimmende Eigenschaft hat. Es ist nicht zu glauben, „daß diese einfache logische Wahrheit dem Gründer des neuen „Systemes entgangen seyn sollte, und man muß daher anneh-„men, daß nach Ohm das, was eine Summe zur Summe „macht und von andern Formen unterscheidet, nur das zwischen „den Summanden stehende Kreuz ist, und daß ein logischer „Begriff unter dem Worte Summe gar nicht zu suchen ist. Auf „einen wissenschaftlichen Werth können aber diese Rechnungs-„arten dann wohl keinen Anspruch machen, und gerade in so „weit sie allgemein sind, muß man sie als vollkommen nichtig „und werthlos ansehen. Untersucht man, in wie weit die aus „ihnen zusammengesetzten Formeln quantitative Anwendungen „zulassen, so ist klar, daß man sich auf absolute ganze Zahlen „beschränken muß, und daß niemals in einer Differenz der „Minuendus kleiner seyn darf als der Subtrahendus; denn nur „von solchen Zahlen sind die Rechnungsarten abstrahirt worden;

„man ist also in dieser Beziehung, trotz der ungeheuern Allge„meinheit der Formeln, nicht um einen Schritt über die abso„luten ganzen Zahlen hinausgekommen.“

So Herr Kummer. — Ich dagegen frage: Sieht man der Zahl 8 an, ob sie durch Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division erhalten worden ist, wenn solche in einem Ausdrucke gefunden wird? Gewiß nicht. — Die Formen dagegen $5+3$, $12-4$, $2 \cdot 4$, $\frac{16}{2}$ drücken zwar alle dieselbe Zahl 8 aus, lassen aber zugleich die Art erkennen, wie solche Zahl 8 entstanden ist. — Ist es also der Inhalt 8, an dem das Daseyn irgend einer bestimmten dieser 4 Operationen und die Art der Entstehung dieses Inhaltes erkannt wird, oder ist es die Form des Ausdrucks, woran man solches erkennt? — Doch offenbar das letztere. — Und wenn nun festgestellt worden ist, daß die Form $a+b$ die vorhandene Addition, die Form $a \cdot b$ die vorhandene Multiplikation ausdrücken soll, und wenn ferner gesagt ist, daß man unter Summe diese bestimmte Form $a+b$ verstehen wolle, welche Form als eine Eigenschaft mit noch einer andern Eigenschaft (daß die Elemente a und b mit einander vertauscht werden können), einen Inbegriff von Merkmalen, also der Logik zu Folge einen Begriff bildet (in so fern sich diese Merkmale einander nicht widersprechen) — wie ist es nun möglich, unter diesem so bestimmt gegebenen Begriffe irgend eine andere symmetrische Funktion von a und b sich zu denken, wie Herr K. meint? — Hat denn irgend eine andere symmetrische Funktion von a und b das erste und Hauptmerkmal des Begriffes der Summe, nämlich diese bestimmte Form? — Und diese bestimmte Form hat zur Folge, daß wenn in den Anwendungen a und b wirkliche Zahlen vorstellen, dann $a+b$ diejenige Zahl vorstellt, die so viele Einheiten hat als a und b zusammengenommen haben. Hat denn irgend eine andere symmetrische Funktion von a und

b dieselbe Folge? — Wenn Herr K. durchaus einen Inhalt haben will, so sind ja die Formen

$$a+b, \quad a-b, \quad a \cdot b, \quad \frac{a}{b}$$

nicht so ganz inhaltlos, da jede dieser Formen eine bestimmte Verstandes-Thätigkeit repräsentirt, welche ihr Inhalt ist. Und zu verlangen, daß der Inhalt eines solchen Ausdrucks allemal eine Zahl (oder Größe) seyn müsse, weil man diese Verstandes-Thätigkeiten bei der Zahl kennen gelernt hat, — wäre das nicht eben so viel, wie wenn ein Anderer verlangen wollte, daß jedes Thier gerade derselbe Kanarien-Vogel seyn müsse, welchen er als Kind zufällig zuerst wahrgenommen hatte, ehe er noch irgend ein anderes Thier gesehen? — Ferner: Herr K. will den Inhalt der Differenz a—b mit Händen greifen, derselbe muß nach ihm eine Zahl oder doch eine Größe seyn; dies ist allerdings jene nun bald gänzlich veraltete Ansicht, welche in einem Gegensatze der Sache entgegengesetzte Größen sieht, und welche in ihrer Konsequenz zu den unglücklichen Mißgeburten der imaginären Größen geführt hat, die doch (nach diesen älteren Ansichten) in der mathematischen Analysis dieselbe Rolle spielen, auf welche in der Physik das hölzerne Eisen Anspruch machen müßte, wenn es einem unglücklichen Physiker einfallen wollte, einen solchen Begriff in der Physik einzuführen. — Warum will man denn aber gerade in der mathematischen Analysis alles Denken anders haben, als die Logik es vorschreibt, anders als es in den gemeinsten Fällen des Lebens wirklich gehandhabt wird. Kann man z. B. den Begriff Thier mit Händen greifen? — in so fern dieser Begriff nur alle diejenigen Merkmale in sich vereinigt, welche alle Thiere mit einander gemein haben, also kein Individuum seyn kann. Wie traurig sähe es um den Menschen aus, wenn ihm die Gabe der Abstraktion versagt wäre, wenn er sich nur mit Individuen (bloßen Anschauungen) beschäftigen, wenn er immer auf der Erdscholle

fortkriechen müßte und zu keinem allgemeineren Begriffe sich erheben könnte! — Wenn wir aber die Gabe der Abstraktion, welche die Hälfte alles Denkens ausmacht, besitzen, warum sollte es so unmöglich seyn, obgleich man das Addiren und Subtrahiren bei den ganzen Zahlen zuerst bemerkt hat, solches von den ganzen Zahlen zu abstrahiren, d. h. zwei Verstandes-Thätigkeiten sich zu denken, welche mit einander in demselben Gegensatze und in denselben Beziehungen zu einander stehen, als das bei den ganzen Zahlen bemerkte Addiren und Subtrahiren? — sobald nur zugleich nachgewiesen wird, daß solche nicht irgendwo sich widersprechende Merkmale in sich aufgenommen haben, und daher auch keine sich widersprechenden Resultate in sich aufnehmen können. — Lehrt denn die Logik nicht, wie man von Anschauungen zu Begriffen, und von diesen wieder zu allgemeineren Begriffen sich erhebt? — können oder wollen wir nun nicht dasselbe, in der Logik vorgeschriebene Verfahren auch auf die Betrachtung der in der mathematischen Analysis vorkommenden Anschauungen und Begriffe anwenden? — Wenn Herr K. mir erlaubt, seiner obigen Aeußerung (daß man doch immer nur ganze Zahlen habe, und daß ich trotz der ungeheuren Allgemeinheit meiner Formeln doch nicht einen Schritt über diese ganzen Zahlen hinauskomme) einen guten Sinn unterzulegen, so wird er hierin Recht, und doch mein Verfahren nicht bloß seinen unläugbaren Vorzug, sondern, was mir die Hauptsache ist, seine Vernunft-Nothwendigkeit behalten. Es ist nämlich ganz wahr, daß es keine anderen Zahlen giebt als die sogenannten unbenannten ganzen, wie sie schon in der gemeinen (bürgerlichen) Rechenkunst von uns gebraucht werden. Alle gebrochenen, negativen, imaginären Zahlen sind nur selbstständig gebliebene Verbindungen zweier oder mehrerer solchen ganzen Zahlen mittelst der von dem Dividiren, Subtrahiren und Radiciren abstrahirten allgemeineren, und dann bezüglich mit demselben Namen benannten Verstandes-Thätigkeiten (Opera-

tionen). Dies fällt sogleich in die Augen, wenn man es versuchen will, des Tags $^3/_4$ mal spazieren zu gehen, $\sqrt{-1}$ mal zu speisen, oder (—2) Gläser (sage: minus zwei Gläser) Wein zu trinken. — Alle Anwendungen, welche der Mathematiker macht, müssen daher von unbenannten ganzen Zahlen ausgehen und mit unbenannten ganzen Zahlen endigen; selbst wenn man die Einleitung zur Rechnung so trifft, daß man sich mit dergleichen selbstständigen Verbindungen zweier ganzen Zahlen begnügen kann, d. h. also z. B., wenn man statt des Ausdruckes „8 Zoll" für eine Gerade sich mit der Form „$^2/_3$ Fuß" begnügt, in so ferne nämlich nachgewiesen ist, daß unter der letzteren Form der erstere Ausdruck verstanden wird. — Um aber von den gegebenen unbenannten ganzen Zahlen zu den gesuchten unbenannten ganzen Zahlen zu gelangen, — dazu bedient man sich eben nun der mathematischen Analysis, d. h. einer systematischen, logisch geordneten Reihenfolge von Gedanken, Urtheilen und Schlüssen, welche keine Zahlen sind, welche der Analyst aber durch Zeichen, also durch Formen versinnlicht, um sie (diese Gedanken, Urtheile und Schlüsse) dadurch vor seinen Augen sichtbar, die Gesammtfolge derselben übersichtlich, und, im Falle diese lange Folge zufällig unterbrochen worden seyn sollte, leicht wiederholbar zu machen. — Von ganzen unbenannten Zahlen aus wieder zu ganzen unbenannten Zahlen zu gelangen, ist also der Zweck der mathematischen Analysis, dieß durch eine Kette von Schlüssen zu bewirken, die Aufgabe derselben. — Die mathematische Analysis ist also die Brücke, welche von dem einen Ufer zu dem andern führt, ohne selbst Acker- oder Wiesenland zu seyn. So wie aber jede Brücke möglichst fest gebaut, von Lücken und mangelhaften, unhaltbaren Stellen frei seyn muß, so muß nun auch die mathematische Analysis ein nach den Regeln der Baukunst (d. h. der Logik) mit Geschick zusammengefügtes, fest zusammenhaltendes, compaktes Ganzes seyn, bei welchem es nicht so-

wohl darauf ankommt, wie ein flüchtiger Passagier die eine oder die andere Stelle ansieht, sondern in welchem Verhältniß sie zu dem Ganzen stehe. Deshalb aber muß man den Bau erst studiren; und es reicht ein flüchtiges Darüber-hinlaufen natürlich nicht nur nicht aus, das Ganze zu würdigen, sondern dieses flüchtige Passiren kann und muß nur zu dem Fehlgriff führen, die einzelnen Stücke für unbrauchbar zu halten, weil sie so ganz anders aussehen, als man solche bisher zu sehen sich gewöhnt hat, d. h. weil sie nicht lose, für den augenblicklichen Bedarf hingeworfene Krüppel, sondern aus einer das Ganze nach unabänderlichen Gesetzen leitenden Idee mit Nothwendigkeit hervorgegangen sind. —

Herr K. sagt ferner:

„Ein besonderes Faktum trug auch nicht wenig dazu bei, „die Mängel der bestehenden Methoden aufzudecken, und dasselbe scheint namentlich auch auf die ganze mathematische Bil„dung des Vfrs. der vorliegenden Schrift einen sehr bedeuten„den Einfluß ausgeübt zu haben, nämlich daß Poisson im Jahre „1811 durch ein Zahlen-Beispiel klar nachwies, daß die bisher „für ganz richtig und allgemein gültig gehaltenen Entwickelun„gen der Potenzen des Sinus und Kosinus, nach Sinus und „Kosinus des vielfachen Bogens, in einem besonderen Falle „ganz falsch wären. Es ist merkwürdig, wie damals bei dem „Bestreben, diesen Widerspruch zu lösen, viele sonst geschickte „und geachtete Mathematiker sich in immer tiefere Widersprüche „stürzten und neue Fehler dazu begiengen; Ohm aber hat das „Verdienst*), daß er zu denen gehört, welche in dieser Sache

*) Dies, was Herr K. merkwürdig findet, erscheint mir gar nicht so. Da der mathematischen Analysis alle feste Grundlage fehlte, worauf konnte man denn bei Untersuchung einer eben daraus hervorgegangenen Thatsache sich stützen? — Und wenn es mir gelungen ist, diese Thatsache befriedigend aufzuklären (s. Aufsätze aus dem Gebiet der höhern Mathematik, Berlin **1823**), so habe ich kein anderes Verdienst dabei, als gerade das, was

„klar waren und die vorhandenen Fehler richtig erkannten und „verbesserten. Damals glaube ich, wo es sich zeigte, daß auch „in den Elementen der Analysis noch so manches Unbegründete „und Ungewisse sich vorfände, hat Ohm seine Richtung auf das „Elementare bekommen und hat seitdem in seinen Handbüchern „diesen Mangel zu verbessern gesucht. Daß jene Fehler bei der „Entwickelung der Potenzen des Sinus und Kosinus wirklich „einen entscheidenden Einfluß auf Ohm's mathematische Bildung „gehabt haben, scheint mir auch daraus klar hervorzugehen, daß „er auch in der gegenwärtigen Schrift nicht umhin kann, alle „bei jener Gelegenheit begangenen Irrthümer noch einmal durch„zugehen, und daß er überhaupt die wenigen anerkannten Fehler „der größten Mathematiker mit großer Vorliebe erwähnt."

Hiergegen muß ich erwiedern: Die oben gedachte Bemerkung Poisson's wurde mir im Jahre 1822 in einer mathematischen Gesellschaft von dem Herrn Grüson zuerst mitgetheilt, kurze Zeit nachdem die beiden ersten Theile meines „Versuchs eines vollkommen konsequenten Systems der Mathematik" (in der ersten Auflage) fertig gedruckt waren, d. h. die Schrift, in welcher ich meine neuen Ansichten zum ersten Male in einem vollständigen und wohlbegründeten Zusammenhange dem mathematischen Publikum mittheilen konnte. Dieses vereinzelte Faktum konnte daher auf die Richtung meiner Studien keinen Einfluß haben, nachdem ich schon so manche Quellen von Irrthümern aufgedeckt und zu vermeiden gelehrt hatte. Fragt man mich aber: Was war es denn sonst, was von dem Augenblick an, wo ich im Jahre 1811 als Privatdocent der Mathematik an der Universität zu Erlangen auftrat, mich zu den zehnjährigen anhaltenden Studien bewog, die der Herausgabe meines „Systems" in seiner ersten Auflage vorausgiengen? — so muß ich

Herr K. mir durch seine Recension streitig machen will, nämlich: der mathematischen Analysis diese feste Grundlage gegeben zu haben, auf der endlich fester Fuß gefaßt werden konnte.

antworten: Wahrheits- und Gerechtigkeits-Sinn; — die Ueberzeugung, die ich schon früher, bei dem vielen Privat-Unterricht, den ich als Student gab, gewonnen hatte, daß man jemanden (nach den ältern Ansichten) in der mathematischen Analysis nicht unter-richten, sondern nur ab-richten könne; — der Widerspruch zwischen meinen Lehren (nach der ältern Ansicht) und meiner Ueberzeugung, nach der ich meinen Schülern Dinge glaublich machen mußte, an die ich selbst nie glauben konnte, da die überall in den Elementen der mathematischen Analysis von selbst redende Inconsequenz mich anwiderte; — die unglückliche Lage eines Mannes, dem die Wahrheit über Alles geht, und der täglich lehren mußte, was offenbar der Wahrheit nicht entsprach, dessen Thun also täglich mit seiner bessern Ueberzeugung im Widerspruche stand. Und je mehr meine Vorlesungen gesucht waren, desto mehr mußte meine Unzufriedenheit mit mir selbst wachsen, desto inniger mußte ich mich zu meinen begonnenen Arbeiten hingetrieben fühlen. — So entstand meine Richtung; und wie viel Mühe es mich gekostet hat, um nach und nach mich selbst von allen angelernten, unwahren Dogmen loszureißen, weiß niemand mehr als ich selbst.

Nachdem es mir aber gelungen ist, mit wesentlich nie unterbrochener Consequenz alle Erscheinungen an den äußersten Grenzen der mathematischen Analysis als nothwendige Folgen meiner allerersten Begriffe herzustellen, nachdem dadurch die allerersten Anfänge und die letzten Enden und alles was dazwischen liegt in ein innig verbundenes Ganzes, in das endlich vereinigt ist, was man eine wissenschaftliche Einheit nennt, — stehe ich zu vortheilhaft gegen jeden, der, wie Herr K., jene älteren Ansichten noch länger festhalten und vertheidigen will, um für meine Ansichten auch nur noch das Geringste fürchten zu dürfen. Ich kenne nämlich beide Ansichten genau, die älteren, nach denen ich nicht nur unterrichtet worden bin, sondern die

ich selbst vielleicht 10 Jahre lang gelehrt habe, und meine neueren, die ich jetzt schon seit beinahe 25 Jahren öffentlich bekenne. Ein Anderer kennt nur die ältern Ansichten allein und meine neueren entweder nicht (wie dies z. B. bei dem Hrn. Kummer der Fall ist), oder er studirt diese meine Ansichten, um sie genau kennen zu lernen, und adoptirt sie dann aber auch (dem Wesen nach), wie ich an nicht wenigen Beispielen nachweisen kann. Daß man dabei manches Unwesentliche noch mannichfaltig abändern könne, versteht sich von selbst und ich bin es gerade, der seit 20 Jahren daran abrundet; — nie aber habe ich mich auch nur im Entferntesten veranlaßt gesehen, am Wesen der Sache etwas zu ändern.

Die meisten Irrthümer hat Herr K. in den Schluß seiner Recension zusammengehäuft. Es heißt darin:

„Wenn man nachforscht, was eigentlich Ohm bewogen haben mag, die Mathematik nicht mehr als Lehre von den Größen „aufzufassen, als welche sie seit Jahrtausenden unbestritten gegolten hat*), so sind dies unstreitig (!!?) die divergirenden „unendlichen Reihen und die imaginären Formeln gewesen**); „denn dieses sind Formen, zu denen die Analysis in ihrer Entwickelung nothwendig gelangt, und welche in der That keine „Größen mehr sind a). Wenn aber eine Funktion in eine unendliche Reihe entwickelt wird, welche divergirt, so zeigt dies „nur, daß in diesem Falle die für die Reihen-Entwickelung ge-

*) Sage ich denn, daß die Geometrie keine Größenlehre sey? und diese allein kennt man seit Jahr-Tausenden. Ich habe ja nur von der mathematischen Analysis gesprochen, die nicht viel mehr als eben so viele Jahr-Hunderte erst alt ist.

**) Nach dem von mir vorher Gesagten ist dieß ein zweiter großer Irrthum. Solche Raisonnements a priori, wie sie in unserem Jahrhundert Mode geworden sind, müssen an geschichtlichen Thatsachen gar zu häufig scheitern.

„fundene Form unstatthaft ist, und wenn das Resultat einer „analytischen Aufgabe eine imaginäre Formel giebt, so muß „man daraus schließen, daß die Aufgabe selbst einen Wider„spruch in sich enthält b). Die imaginären Formeln haben aber „außerdem einen ganz andern Zweck, in so fern sie als Mittel „für analytische Rechnungen benutzt werden c). Eine solche „Gleichung zwischen imaginären Formeln stellt bekanntlich d) „immer zwei Gleichungen dar, und ist nur als ein abgekürzter „symbolischer Ausdruck für die beiden in ihr enthaltenen Glei„chungen realer Größen anzusehen; in so fern ist auch die „Rechnung mit imaginären Formeln ebenfalls nur Rechnung „mit wirklichen Größen e). Dergleichen symbolischer Ausdrücke, „welche weitläufige Rechnungen oft höchst vortheilhaft abkürzen, „giebt es auch in der Analysis noch mehrere, z. B. die Gleich„ung $\Delta^n u = (e^{\frac{d}{dx}h} - 1)^n u$; m. s. **Lacroix traité élémentaire „de calcul integral** §. 391. f). Man kann aber nicht be„haupten, daß diese Gleichung etwas anderes ausdrücke, als „das quantitative Gleichseyn der durch symbolische Zeichen dar„gestellten Ausdrücke. Die Mathematiker, welche nur überall „mit Größen rechnen, werden darum ohne Inconsequenz auch „mit imaginären und anderen passenden symbolischen Ausdrücken „rechnen können, da diese ihnen nur Beziehungen realer Grö„ßen ausdrücken g), und man hat durchaus nicht nöthig, diesen „imaginären Formeln zu Liebe die Definition der Mathematik „abzuändern.“

Ich habe die einzelnen Stellen dieser Periode mit den Buchstaben a—g bezeichnet, um mich in dem, was ich darüber zu sagen habe, kürzer fassen zu können. — In a. und g. giebt Herr K. zu, daß in der Analysis Erscheinungen vorkommen, welche keine Größen sind, mit denen man aber rechnen könne, weil solches zu richtiger Vergleichung der Größen führe.

Nun sind wir, Herr K. und ich, nachdem unsre Ansichten in diesem wichtigsten Punkte übereinstimmen, nur noch in der Kleinigkeit aus einander, daß ich Schritt vor Schritt auf logisch richtigem Wege den ganzen Gang der mathematischen Analysis mit Bewußtseyn verfolgen kann und verfolge, während Herr K. bloß sagt, es mache sich so, aber durchaus nicht anzugeben weiß, wie und warum sich das so mache. Wer aber seine Lehren nicht mit vollem Bewußtseyn des Wie und Warum vorträgt, der kann zwar jemanden abrichten, nie aber können solche Lehren mit Recht als Unterrichts-Gegenstand bezeichnet werden. Warum treibt man denn Logik, da man durch das Leben auch schon für das Leben ausreichend denken lernt? — Warum treibt und studirt man denn die Grammatik seiner Muttersprache, da jeder in gebildeter Umgebung aufgewachsene Mensch doch durch das Leben für das Leben ziemlich richtig sprechen und schreiben lernt? — Was ist denn eine Wissenschaft anders als eben nur das, was man wissentlich, d. h. mit Bewußtseyn treibt? — Außerdem treibt man eine Rechen-Kunst, das Wort Kunst hier im Sinne eines Handwerks verstanden.

Die dem Cauchy nachgesprochene Behauptung d. ist ohnedieß nicht wahr und paßt z. B. schon nicht auf die Gleichung

$$(\odot)\cdots \qquad \frac{14-8\cdot\sqrt{-1}}{2-3\cdot\sqrt{-1}}=4+2\cdot\sqrt{-1},$$

welche hiernach als diese andere Gleichung

$$(\mathbf{C})\cdots \qquad 4+2\cdot\sqrt{-1}=4+2\cdot\sqrt{-1}$$

gedacht werden müßte und dann zu den Wahrheiten führte, daß $4=4$ und $2=2$ ist; — während es gerade der mathematischen Analysis zukommt, mit Bewußtseyn darzulegen, warum statt des Quotienten $\frac{14-8\cdot\sqrt{-1}}{2-3\cdot\sqrt{-1}}$ zur Linken der Gleichung $\odot$ der Ausdruck $4+2\cdot\sqrt{-1}$ gesetzt werden darf, welches letztere geschehen muß, wenn die erstere Gleichung $(\odot)$ in die andere

(C) übergehen und dann den bezeichneten Sinn haben soll. Dazu ist aber ein allgemeinerer Begriff des Multiplicirens (der nicht bloß für reelle Zahlen gilt), wie auch ein allgemeinerer Begriff der Gleichung nöthig; und es reicht namentlich der völlig einseitige Begriff der letzteren, den man angegeben findet, „daß nämlich eine Gleichung eine Uebereinstimmung in „der Quantität ausdrücke", nicht aus. — Paßt z. B. dieser Begriff auf die obige Gleichung ⊙, in welchem Sinne sie auch aufgefaßt werden möge? —

In e. verwechselt Herr K. wiederum die Rechnung selbst mit dem Zwecke derselben.

Zu der Behauptung in f., „daß es in der mathematischen „Analysis noch mehr symbolische Formeln gebe", kann ich nichts weiter hinzufügen, als daß gerade deshalb die Pflicht des mathematisch-analytischen Pädagogen um so dringender wird, von allen diesen Erscheinungen ihre nothwendige Entwicklung nachzuweisen; — ferner daß man auch von der praktischen Seite genau den Umfang kennen muß, in welchem alle Symbole benützt werden dürfen, oder vielmehr die Gesetze, nach denen sie sich richten, wenn man nicht Gefahr laufen will, wie es dem Laplace in seiner zu unvorsichtig weit getriebenen théorie des fonctions génératrices gegangen ist, eine nicht geringe Anzahl irriger Resultate zu erhalten, welche in der höhern Mathematik desto sorglicher zu vermeiden sind, je schwerer sie sich auf anderem Wege, als gerade nur durch richtiges Schließen, als irrige erkennen lassen. Ist freilich der Irrthum einmal erkannt, so läßt er sich dann auch immer leicht noch anderweitig nachweisen; ja es lassen sich dann sogar Regeln angeben, wie die gegenwärtigen Irrthümer vermieden werden können. Wir brauchen aber Regeln, nach denen die zukünftigen Irrthümer vermieden werden, und diese kann man ohne eine gründliche Wissenschaft der Zahlen und ihrer Verbindungen (also nach den ältern Ansichten) nie und zu keiner Zeit angeben.

Es thut mir übrigens leid, daß es gerade Herr Kummer ist, der als Vertreter des Alten und Veralteten die Sache so sehr leicht und oberflächlich genommen hat, da derselbe in einigen anderen mir zu Gesichte gekommenen rein analytischen (nicht pädagogischen) Abhandlungen meine Achtung sich erworben; ich muß es um so mehr bedauern, daß derselbe es nicht abgelehnt hat, die Beurtheilung eines Werkes zu übernehmen, an welchem dessen Verfasser, (dem wenigstens noch nie weder Ungeschicklichkeit noch Mangel an Eifer zur Last gelegt worden sind) 30 Jahre lang mit allen seinen Kräften gearbeitet hat, und welches deshalb zu seiner Beurtheilung auch ein längeres Studium erfordert, als Herr K. ihm gewidmet hat, oder vielleicht ihm widmen konnte.

Unwesentliche Mängel auch dieser „zweiten Abhandlung", die oft in den überhäuften Arbeiten des Verfassers ihren Grund haben, wolle der freundliche Leser auch diesmal entschuldigen.

Berlin im Mai 1845.

M. Ohm.

An der so langen Verzögerung des Drucks, nachdem das Manuscript nebst Vorrede schon im Mai 1845 an den Druckort abgesandt worden war, so wie an den in den ersten 5 Bogen vorkommenden Druckfehlern trägt der Vfr. keine Schuld.

Der geneigte Leser wird aber hier (wie Kap. I. pag. 30.) noch einmal besonders darauf aufmerksam gemacht, daß im ersten Kapitel überall stehende (d) gesetzt worden sind, während durchweg runde (∂) dafür gedacht werden müssen.

Berlin im Juli 1846.

M. Ohm.

Druckfehler=Verzeichniß.

Vorrede pag. XIV. Z. 10. v. o. lies „Knüppel" statt Krüppel.
Einl. pag. 4. Z. 5. v. u. l. „erhält" statt erhielt.
Einl pag. 11. Z. 12. v. o. l. „kurz" statt kurze.
Einl. pag. 30. Z. 4. v. o. muß im Nenner rechts *Tg* (q i) statt *Tg* q.i stehen.

Im ganzen ersten Kapitel l. ∂ statt d

Kap. I. pag. 5. Z. 6. v. o. l. „welche die Form" st. welche Form.
pag. 12. Z. 13. v. u. l. „Da" statt Wo.
pag. 23. Z. 14. v. u. l. „mon" statt non.
pag. 31. erste Z. v. o. muß IV. voranstehen.

Die übrigen Druckfehler fallen als solche sogleich in die Augen, und bedürfen daher keiner besonderen Aufzählung.

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

Nr. 1 — Nr. 10. Allgemeine Betrachtungen über die 4 erstern oder sogenannten elementaren Operationen . . 3

Nr. 11 — Nr. 15. Analoge Betrachtungen über die 3 höhern Operationen 10

Nr. 16. Die allgemein wahren Formeln, nach denen mit Potenzen in allen Fällen sicher gerechnet wird, weichen von den früher für allgemein wahr gehaltenen an einigen Stellen ab 14

Nr. 17. Auch eine der Formeln der Logarithmen bedarf einer Korrection 16

Nr. 18. Alle specielle Zahlformen stecken in der Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ 16

Nr. 19. Je zwei Ausdrücke, welche dem allgemeinen Begriff der Gleichheit entsprechen, drücken eine und dieselbe Zahl von der Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ aus, so oft sie in Ziffern-Ausdrücke übergehen . . . 17

Nr. 20. Stellung der Algebra in der mathematischen Analysis 17

Nr. 21. Wann hört das Rechnen mit Ziffern-Ausdrücken auf? — 17

Nr. 22. Nr. 23. Wo hört das allgemeine Rechnen auf? — 19

Nr. 24. Wann dürfen die unendlichen Reihen nicht mehr als allgemeine gedacht, — von wo ab müssen sie demnach als numerische und dann natürlich auch als konvergente angesehen werden 22

Seite

Nr. 25. Nr. 26. Wie die Differential- und die Integral-Rechnung noch ein weites Feld zu allgemeinen Rechnungen liefern; — wie allgemein-bestimmte von numerisch-bestimmten Integralen unterschieden werden müssen 23

Nr. 27. Wie an die Stelle der letztern die erstern treten müssen und dadurch noch eine allgemeine Rechnung möglich werden kann 24

Nr. 28. Unterschied der Zeichen

$$\frac{1}{Sin}x, \quad \frac{1}{Cos}x, \quad \frac{1}{Tg}x, \quad \frac{1}{Cotg}x$$

von den Zeichen

Arc sin. x, *Arc cos.* x, *Arc tg.* x, *Arc cotg.* x . 25

Nr. 29. Einige frühere Ausrechnungen 28

Nr. 30. Nr. 31. Die Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten imaginärer Bogen; — desgleichen die Bogen (Argumente) zu gegebenen imaginären Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten ausgerechnet . 29

Erstes Kapitel. Die gesammte Ableitungs-Rechnung.

Einleitung. Gründe gegen die Leibnitz'sche Ansicht, wie gegen die Methode der Grenzen 3

§. 1. Erklärung der Ableitungs-Rechnung und des Differenziirens 7

§. 2. §. 3. Beweis der allgemeinen Existenz des Differential-Koefficienten 7

§. 4. Allgemeine Formeln der Ableitungs-Rechnung . 17

§. 5. Darlegung der Möglichkeit des Differenziirens solcher Funktionen, die durch mehrere Gleichungen verwickelt gegeben sind 19

§. 6. Der Taylor'sche und Maclaurin'sche Lehrsatz 20

§. 7. Es ist einerlei, in welcher Ordnung nach verschiedenen Veränderlichen differenziirt wird 22

§. 8. Welche Ereignisse für besondere Werthe des Veränderlichen eintreten können 27

Seite

Zweites Kapitel. Integrale entwickelt gegebener Funktionen.

Erste Abtheilung. Von den unbestimmten Integralen.

§. 9. Erklärung und allgemeine Formeln 30
§. 10. — §. 12. Was in jeder Klasse der Funktionen für das Integriren geschehen kann 33
§. 13. Reduktions-Formeln 43
§. 14. Integriren durch unendliche Reihen 47
§. 15. Wo die Ergänzungsglieder nothwendig werden . 49

Zweite Abtheilung. Von den allgemein-bestimmten Integralen.

§. 16. Begriff dieses Integrals. Die Grenzen sind allgemein, also eben so gut imaginär als reell . . . 51
§. 17. Formeln für die allgemein-bestimmten Integrale 52
§. 18. Es ist einerlei, in welcher Ordnung man integrirt oder differenziirt 53
§. 19. Zerlegung der allgemein-bestimmten Integrale in mehrere; Umformung durch Verwechslung der Grenzen 61
§. 20. Formeln zur Umformung allgemein-bestimmter Integrale in andere, deren Grenzen sich verändert haben 62

Drittes Kapitel. Uebergang der Form-Gleichungen in Zahlen-Gleichungen. Vom Unendlich-Großen und Unendlich-Kleinen. Ueber den Gang der reellen Werthe einer Funktion. — Der Lagrange-Taylor'sche und der Lagrange-Maclaurin'sche Lehrsatz. — Die Leibnitzische Differential-Rechnung.

§. 21. Erklärung des Unendlich-Großen (∞) und des Unendlich-Kleinen $\left(\frac{1}{\infty}\right)$. — Unterschied zwischen $\frac{1}{\infty}$ und o 67
§. 22. Das relativ Unendlich-Große und das relativ Unendlich-Kleine. — Unendlich-Kleine der verschiedenen Ordnungen 69

Seite

§. 23. Jede Gleichung, welche unendlich-kleine Glieder verschiedener Ordnungen enthält, zerfällt in eben so viele einzelne Gleichungen, von denen jede nur Glieder einer und derselben Ordnung enthält 71

§. 23 b. Das reelle Unendlich-Kleine verschwindet gegen das reelle oder imaginäre Endliche, und das imaginäre Unendlich-Kleine $\frac{1}{\infty} \cdot \sqrt{-1}$ verschwindet gegen das reelle Endliche 73

§. 24. Wann unterbricht eine Funktion ihre Stetigkeit? 74

§. 25. Es ist allemal $f_{x+h} = f_x + \partial f_{x+\vartheta h} \cdot h$, wo $\vartheta > 0$ und < 1 78

§. 26. Anwendung dieses Satzes auf Bestimmung des Ganges der reellen Werthe einer Funktion eines Veränderlichen 79

§. 27. Der Lagrange-Taylor'sche und der Lagrange-Maclaurin'sche Lehrsatz 81

§. 28. Dieselben Sätze auf Funktionen mehrerer Veränderlichen ausgedehnt 87

§. 29. 30. Die Leibnitzische Differential-Rechnung 89

§. 31. Vom imaginären Unendlich-Kleinen. Erweiterung der Leibnitzischen Differential-Rechnung auch auf letztere 92

Viertes Kapitel. Von den numerisch-bestimmten Integralen.

§. 32. Begriff und Bezeichnung des numerisch-bestimmten Integrals 96

Anmerk. Gewisse Summen lassen sich nicht durch ein einziges, sondern nur durch mehrere numerisch-bestimmte Integrale ausdrücken 100

§. 33. Wann das numerisch-bestimmte Integral zwischen endlichen Grenzen doch keinen Werth hat 104

Seite

§ 34. Vergleichung der Eigenthümlichkeiten der allgemein-bestimmten mit denen der numerisch-bestimmten Integrale 107

§. 35. Erweiterung des Begriffs des numerisch-bestimmten Integrals, so daß dx in $\varphi_x \cdot dx$ auch negative Werthe annimmt 112

§. 36. — §. 38. Untersuchung, ob einige und welche der in den §§. 17 — 20. für allgemein-bestimmte Integrale hingestellten Formeln, auch noch für die numerisch-bestimmten Integrale gelten. Merkwürdige Ausnahme 113

§. 39. Erweiterung des Begriffs des numerisch-bestimmten Integrals für den Fall, daß die Grenzen beliebig reell oder imaginär sind 136

§. 40. §. 41. Dieses allgemeinere numerisch-bestimmte Integral, wenn es existirt, ist dem analogen allgemein-bestimmten Integrale gleich 137

§. 42. Untersuchung, ob die früheren Formeln für diese allgemeineren numerisch-bestimmten Integrale noch gelten 139

Fünftes Kapitel. Von den numerischen unendlichen Reihen, und von den numerisch-bestimmten Integralen mit unendlich-großen Grenzen.

§. 43. Begriff und allgemeine Sätze der Konvergenz numerischer unendlicher Reihen 144

§. 44. Begriff des konvergenten und divergenten Integrals mit einer unendlich-großen Grenze 149

§. 45. Kennzeichen der Konvergenz und Divergenz solcher Integrale mit einer unendlich-großen Grenze; Kennzeichen der Konvergenz der unendlichen Reihen . . . 153

§. 46. Letztere auf einige Reihen angewandt . . . 156

Seite

§. 47. Die bekannten Lehrsätze der Konvergenz der Reihen 158

§. 48. Integrale mit zwei unendlich = großen Grenzen . 165

§. 49. Integrale mit den Grenzen $\alpha+\beta\cdot i$ und $\gamma+\delta\cdot i$, während α, β, γ, δ zum Theil oder alle unendlich=groß werden 167

Einleitung.

Einleitung.

In der „Ersten Abhandlung“ über den „Geist der mathematischen Analysis“ sind nachstehende Wahrheiten hingestellt worden:

1) Der Zweck der mathematischen Analysis ist die Vergleichung der Größen mittelst der Zahl (der sogenannten positiven ganzen Zahl, der einzigen Zahl, die es giebt). Zur Erreichung dieses Zweckes bedient sie sich aber der Größe nie und zu keiner Zeit, sondern eben nur der Zahl (der unbenannten ganzen).

2) Von dieser Zahl werden die (7) Zahlen-Verbindungen als Verstandes-Geschäfte (Operationen) abstrahirt, und der erste und allgemeinste Theil der Analysis hat „die nähere Kenntniß der Gegensätze und der Beziehungen „dieser (7) Verstandes-Geschäfte zu einander im Allgemeinen, „und ohne daß eine Rücksicht auf die Besonderheit der mit „einander verbundenen Elemente genommen wird,“ — zum Gegenstand. (Dieser Theil umfaßt die allgemeine Buchstaben-Rechnung, den größesten Theil der sogenannten niedern und höhern Algebra, einen sehr großen, wenn nicht den größesten Theil der sogenannten Differential- und Integral-Rechnung; u. s. w.)

3) Diese Beziehungen und Gegensätze der Zahlen-Verbindungen als Verstandes-Geschäfte werden in ihren einfachsten Zuständen ausgedrückt und zwar durch Gleichungen zwischen solchen Ausdrücken oder Formen, welche die gedachten Verbindungen anzeigen, d. h. durch Gleichungen wie z. B.

$$(a+b)+c=(a+c)+b;\quad (a-b)+c=(a+c)-b=a-(b-c);$$
$$\frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m};\quad a^m\cdot b^m=(ab)^m;\quad \sqrt[m]{ab}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b};$$
$${}^{c}\!\log(ab)={}^{c}\!\log a+{}^{c}\!\log b;\quad {}^{c}\!\log(a^b)=b\cdot{}^{c}\!\log a;$$

u. s. w. f.

In diesen Gleichungen werden die einzelnen Buchstaben ohne alle besondere Bedeutung als bloße Träger der Operations-Zeichen gedacht, und nur die Form der Ausdrücke, welche jedesmal die Aufeinander-Folge dieser (von der Zahl abstrahirten) Verstandes-Thätigkeiten (der Operationen) erkennen läßt, ist der Gegenstand der gesammten Betrachtung.

4) Die Anwendung dieser und der übrigen einfachsten Gleichungen zur Umformung gegebener Ausdrücke (d. h. gegebener Formen) ist das „Rechnen". — Man „rechnet" daher nie mit Größen, auch nie mit Zahlen, sondern immer nur mit Formen, d. h. mit angezeigten Operationen. — Dies gilt selbst für das allererste Ziffern-Rechnen. Schreibt man z. B. hin 24+35, so hat man 24 und 35 schon addirt; das Resultat der Addition steht schon da. Nun wird dieses Resultat umgeformt, d. h. nun wird „gerechnet", und durch dieses „Rechnen" erhielt man nach und nach (20+30)+(4+5), dann 50+9 oder 59, indem die Bedeutung der Ziffern noch zugezogen wird. Vermöge dieses „Rechnens" ist die durch 24+35 ausgedrückte Zahl durchaus nicht verändert worden; dieselbe ist jetzt nur in einer neuen Form ausgedrückt. — Oder

es soll 5276 durch 11 dividirt werden, so erhält man als Resultat der Division die Form $\frac{5276}{11}$; diese Form wird nun umgeformt, zunächst in $400+\frac{876}{11}$, dann in $400+70+\frac{106}{11}$, hernach in $400+70+9+\frac{7}{11}$ (oder in $479\frac{7}{11}$, wie die letztere Form, Abkürzungsweise gewöhnlich geschrieben wird). Das Hinschreiben des Ausdrucks $\frac{5276}{11}$ beendigte das Dividiren; das nochmalige Umformen war das „Rechnen", wodurch man keine Zahl, sondern nur eine neue Form für dieselbe Zahl, die bereits ausgedrückt war, hervorgebracht hat.

5) Das „Addiren", „Subtrahiren", „Multipliciren", „Dividiren", „Potenziren", „Radiziren" und „Logarithmiren" besteht also subjektiv bloß im Gedanken, objektiv aber im Hinschreiben der Formen ($p+q$, $p-q$, $p \cdot q$, $\frac{p}{q}$, p^q, $\sqrt[m]{p}$ und $\overset{m}{log}\,p$, wo p und q oder m, die Ausdrücke vorstellen, welche mit einander verbunden werden sollen, und die entweder einfach oder selbst schon beliebig zusammengesetzt seyn können). — Das „Rechnen" formt dann diese, durch das, dem Gedanken entsprechende Schreiben erhaltenen Ausdrücke um, und bringt sie in diejenige Form, welche gegebenen Zwecken entspricht.

6) Allgemeine Ausdrücke kann man, eben weil sie allgemein sind, nicht reell, nicht imaginär, nicht ganz, nicht gebrochen, nicht positiv, nicht negativ nennen. — Eben so sind allgemeine, nach ganzen Potenzen eines Fortschreitungs-Buchstabens fortlaufende unendliche Reihen (d. h. ganze Funktionen von x vom unendlichen Grade), weder konvergent noch divergent zu nennen, eben weil sie allgemein sind, und noch beide Fälle zugleich in sich schließen. Mit solchen

allgemeinen unendlichen Reihen wird aber vollkommen sicher „gerechnet", eben weil das „Rechnen" nur ein Umformen vorhandener Formen ist, und dieses Umformen nach allgemeinen, (in der Form der Gleichung ausgesprochenen) Gesetzen sich richtet (Nr. 3).

7) Zwei Ausdrücke nennt man „gleiche", wenn sie überall mit dem Bewußtseyn für einander gesetzt werden können, daß man dadurch mit den Gesetzen der, von der Zahl abstrahirten Verstandes-Thätigkeiten (Operationen) im Einklange, folglich dem Endzwecke, welchen der ganze Kalkul beabsichtigt, nicht entgegen handle. — Dies ist der Charakter und das Wesen der in der gesammten mathematischen Analysis vorkommenden allgemeinen Gleichungen.

Ob aber eine Gleichung richtig ist, wird daran erkannt, einmal, daß beide Seiten derselben gleich-viel-deutig sind, und dann, daß sie beide in einen und denselben Ausdruck übergehen, wenn alle indirekten Operationen weggeschafft werden. Der Charakter der Gleichung ändert sich nicht, wenn man auch einzelne bekannte oder unbekannte Ausdrücke durch dazu gewählte Buchstaben (x, z, etc.) bezeichnet und diese Buchstaben in die Gleichungen mit aufnimmt. Die Gleichung $x=\frac{a}{b}$ steht dann statt $\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$, so wie die Gleichung $bx=a$ statt $b\cdot\frac{a}{b}=a$ steht; u. s. f. — Es kann durch Einführung solcher Buchstaben, die nicht mehr bloße Träger der Operations-Zeichen sind, sondern die bestimmte Bedeutungen haben, die Form der Gleichung verändert werden, nie aber ihr Wesen, welches immer das der Identität ist und bleibt, so daß eine solche Gleichung der letztern Form nur gilt, so lange man sich unter dem, eine solche

bestimmte Bedeutung habenden Buchstaben, genau den Ausdruck denkt, welchen er vorstellt.

Es giebt aber auch Gleichungen, welche nicht auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gleich-viel-deutige Ausdrücke haben, so daß in ihnen der Charakter drr allgemeinen Gleichung nicht mehr vollständig vorwaltet. Wir haben solche Gleichungen unvollkommene oder unvollständige genannt, und überall da wo sie erscheinen, müssen solche mit großer Behutsamkeit verwandt werden. So sind z. B. die Gleichungen

$$\sqrt{(a^2)} = a, \text{ oder } log(a^2) = 2 \cdot log\, a$$

oder $\sqrt{(a^2)} = -a$, oder $log(a^2) = log((-a)^2) = 2 \cdot log(-a)$ solche unvollständige Gleichungen, welche zur Linken des (=) Zeichens mehr Ausdrücke enthalten als zur Rechten. Handhabt man nun solche Gleichungen nicht mit der in ihrer Natur liegenden Vorsicht, so wird man z. B. aus je zweien der obigen folgern, entweder daß $a = -a$, oder daß $log\, a = log(-a)$ sey, wovon das Eine eben so unrichtig ist, wie das Andere.

8) Das gemeine Ziffern-Rechnen erscheint bereits als eine Anwendung des allgemeinen Rechnens, so daß noch die Kenntniß und die Bedeutung der Ziffern und die Weise hinzutritt, auf welche jede bestimmte ganze Zahl durch eine Summe ausgedrückt wird, welche die Form einer fallend geordneten ganzen Funktion von x hat (z. B. $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$), in welcher x irgend eine bestimmte Zahl z. B. zehn, a, b, c, d, e, f aber Ziffern bedeuten, die ganze Zahlen vorstellen, welche kleiner als x (zehn) sind. Alle Ziffern-Ausdrücke auf diese letzterwähnte Form zu bringen ist der Zweck der sogenannten „Rechnung mit unbenannten ganzen Zahlen".

9) Die Differenz a—b, wenn sie aus ihrem allgemeinen

Zustand in den besonderen übertritt, wo man sich unter a und b wirkliche (unbenannte) ganze Zahlen denkt, bietet die 3 Fälle dar, wo $a > b$, $a = b$ oder $a < b$ ist; die beiden letztern führen zu den Begriffen der o (Null) und der „negativen ganzen Zahl." — Letztere wird so: $(-\nu)$ geschrieben, wo ν eine wirkliche ganze Zahl vorstellt; und es ist $-\nu$ ein besonderer Fall der allgemeinen Form $-c$, in welcher c ganz allgemein noch, mithin als ein bloßer Träger des Operationszeichens gedacht wird, wobei $-c$ statt $o-c$ steht; mithin eine gedachte, also wirkliche Subtraktion (c von o) vorstellt; wobei o selbst wieder, gehörig allgemein aufgefaßt, ebenfalls nichts weiter als eine gedachte, mithin wirkliche Subtraktion, nämlich die Form $b-b$ bedeutet.

Die Formen $+b$ (d. h. $o+b$) und $-b$ (d. h. $o-b$), wenn b noch ganz allgemein gedacht wird, kann man additive und subtraktive Formen (Zahlen) nennen, nie aber positive nnd negative, weil diese letztere Benennungen nur in dem besonderen Falle stattfinden, in welchem b bereits eine wirkliche ganze Zahl, oder doch ein Quotient zweier solchen wirklichen ganzen Zahlen ist.

Der Quotient $\frac{a}{b}$, wenn a und b solche positive oder negative ganze Zahlen sind, oder wenn a Null ist, wird in jedem Falle in eine der 5 Formen $+\mu$, $-\mu$, $+\frac{\mu}{\nu}$, $-\frac{\mu}{\nu}$ und o umgeformt, wo μ und ν wirkliche ganze Zahlen vorstellen, und wo die angezeigte, also wirkliche und selbstständig bleibende Division $\frac{\mu}{\nu}$ den Begriff der „gebrochenen Zahl" liefert, während die Formen $+\frac{\mu}{\nu}$ und $-\frac{\mu}{\nu}$ die Namen der „positiv und negativ gebrochenen

Zahlen" führen. — Alle 5 Formen werden in den Kollektiv-Namen der reellen Zahlen gesammengefaßt.

Alle Ziffern-Ausdrücke, so weit dies möglich ist, auf die Form der „gebrochenen Zahl" zu bringen, ist „der Zweck des Rechnens mit Brüchen"; alle Ziffern-Ausdrücke auf eine der 5 Formen zu bringen, welche reelle Zahlen genannt werden, ist der Zweck des „Rechnens mit positiven und negativen (d. h. reellen) Zahlen". —

Um aber alle diese Rechnungen augenblicklich und mit Entschiedenheit und Leichtigkeit auszuführen, dazu bedarf es nur der, gleich Anfangs (Nr. 3) erwähnten Gleichungen oder Formeln, welche sich über die einfachsten Verbindungen mittelst der 4 erstern Operationen erstrecken, und welche das Verhalten dieser 4 Operationen in ihren Grund-Typen festsetzen. — Diese Gleichungen sind ganz allgemein gültig, nur mit der einzigen Ausnahme, daß keiner der vorkommenden Divisoren Null seyn darf.

10) Jedes Endresultat einer Rechnung es mögen die Elemente der Rechnung noch ganz allgemein, also bloße Träger der Operations-Zeichen, oder es mögen bereits Ziffern-Werthe an deren Stelle getreten seyn, ist aber natürlich allemal wieder eine Gleichung, und jede solche neue Gleichung drückt natürlich auch nie etwas anderes aus, als wie sich die von den ganzen Zahlen abstrahirten Verstandes-Thätigkeiten (Operationen) zu einander verhalten; jede neue Gleichung drückt dasselbe nur jedesmal in einer neuen Modifikation aus. Am reinsten aber ist dies durch die Gleichungen ausgedrückt, in denen noch gar keine Kenntniß der ganzen Zahlen benützt worden ist. — Von Größen ist daher in einer Gleichung nie und zu keiner Zeit die Rede. Wenn man aber von zwei reellen Zahlen a und b sagt, daß a größer als b, oder daß b kleiner als a sey, so ist dies nur eine Redensart,

durch welche man ausdrücken will, daß sich die Differenz $a-b$ in eine positive Zahl (d. h. in die Form $+\mu$ oder $+\frac{\mu}{\nu}$), oder daß sich die Differenz $b-a$ in eine negative Zahl (d. h. in die Form $-\mu$ oder $-\frac{\mu}{\nu}$) umformen läßt, sobald man die Gesetze des „Rechnens" in Anwendung bringt.

11) Was bis jetzt über die 4 erstern sogenannten elementaren Operationen gesagt ist, läßt sich auch auf die 3 letztern (Potenziren, Radiciren und Logarithmiren), welche auch die höheren Operationen genannt werden können, übertragen, — nur daß hier noch Eigenthümlichkeiten zur Sprache kommen, welche den 4 erstern Operationen fremd sind.

Der ganzen Potenz steht die Wurzel $\sqrt[m]{a}$ gegenüber, wo der Wurzel-Exponent m als eine wirkliche ganze Zahl, der Radicand a dagegen ganz allgemein d. h. als ein bloßer Träger des (Wurzel-) Zeichens gedacht wird. — Es läßt sich nachweisen, daß es m verschiedene d. h. einander nicht gleiche Ausdrücke (Formen) giebt, welche die durch $\sqrt[m]{a}$ repräsentirte Eigenschaft mit einander gemein haben, d. h. welche ein und dasselbe a geben, wenn man sie mit der ganzen Zahl m potenzirt. Alle diese Formen sind durch $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{1}$, oder besser durch $\sqrt[m]{a}\cdot e^{\frac{2\alpha\pi}{m}\cdot\sqrt{-1}}$ oder auch durch $\sqrt[m]{a}\cdot\left[Cos\,\frac{2\alpha\pi}{m}+\sqrt{-1}\cdot Sin\,\frac{2\alpha\pi}{m}\right]$ ausgedrückt, wenn statt α nach und nach $0, 1, 2, 3, \cdots m-1$ gesetzt wird, während der erste Faktor $\sqrt[m]{a}$ noch immer eine bloße Form d. h. eine bloße angezeigte Radikation ist, aber als eindeutig gedacht

wird. — Daher muß man bei dem „Rechnen mit Wurzeln" (d. h. mit angezeigten Radikationen) darauf sehen, immer Formeln anzuwenden, welche auf beiden Seiten gleich-vieldeutig sind, damit man jedesmal (nach 7) mit den Gesetzen der Operationen im vollständigen Einklange sich befinde, während man aus demselben Grunde eine und dieselbe Wurzel $\sqrt[m]{a}$, wenn sie mehreremale erscheint, im Allgemeinen nicht als einen und denselben Ausdruck ansehen darf, sondern als einen Ausdruck, der eine von den gedachten m verschiedenen Formen vorstellt, während solche jedesmal eine andere derselben seyn kann, wenn man nicht die Rechnung auf die kurze vorher gezeigte Weise so eingeleitet hat, daß die Form $\sqrt[m]{a}$ als eindeutig und als immer einen und denselben Ausdruck vorstellend erscheinen kann.

12) Die natürliche Potenz e^x d. h. die unendliche Reihe

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\text{ in inf.}$$

ist nur eindeutig, während x allgemein, d. h. ein bloßer Träger der Operations-Zeichen, wo dagegen e die konvergente Reihe

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\text{ in inf.}$$

vorstellt. Dieser natürlichen Potenz gegenüber steht der natürliche Logarithme $\log a$, welcher $e^{\log a}=a$ zu machen hat und welcher daher unendlich-viel-deutig ist, und eine der unendlich-vielen Formen $\log a+\log 1$, d. h. $\log a+2\mathfrak{b}\pi\sqrt{-1}$ vorstellt, wo statt $\mathfrak{b}$ nach und nach o und jede positive oder

*) Das Zeichen n! bedeutet hier immer das Produkt 1.2.3.4....n; während o!=1!=1 gedacht wird.

negative ganze Zahl gesetzt gedacht werden muß, während der erstere Summand *log* a nur als eindeutig angesehen wird. — Mit Logarithmen muß daher ebenfalls nur nach Formeln gerechnet werden, welche auf beiden Seiten gleich-viel-deutig sind, und mit der Vorsicht, welche (in Nr. 11) für das Rechnen mit Wurzeln angeregt werden mußte.

13) Die Begriffe *Cos* x und *Sin* x sind von uns nicht als geometrische, sondern als analytische aufgefaßt worden, d. h. als Zeichen, durch welche entweder die Ausdrücke

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \text{ und } \frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

oder die, diesen gleichen unendlichen Reihen

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\text{in inf. und } x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!} \text{ in inf.}$$

ausgedrückt werden. Um dies auch für die Sinne recht entschieden hervorzuheben, haben wir sie in der „ersten Abhandlung" immer durch K_x und S_x, d. h. durch Funktionszeichen bezeichnet*). In diesen Kosinussen und Sinussen von x, ist

---

*) Es konnte dabei dem Vfr. nicht im entferntesten in den Sinn kommen diese Zeichen K_x, S_x statt der alten ehrlichen *Cos* x und *Sin* x in den Kurs bringen zu wollen. Der Leser der „ersten Abhandlung" sollte nur dadurch gezwungen werden, so oft diese Zeichen erscheinen, wirklich diese unendlichen Reihen selbst und nicht etwas anderes dabei sich zu denken, damit der Vortrag des Vfrs. möglichst seinen Ansichten gemäß aufgefaßt werden möge. In der gegenwärtigen zweiten Abhandlung setzt der Vfr. voraus, daß der Leser sich bereits in diese Ansichten hineingedacht habe, daß derselbe also auch unter den Zeichen *Sin* x und *Cos* x nie etwas anderes als diese unendlichen Reihen, oder die ihnen gleichen Exponential-Ausdrücke denken werde, und deßhalb wird sich der Vfr. nun wieder durchaus der gewohnten Zeichen *Sin* x und *Cos* x bedienen.

x kein Kreisbogen, sondern ganz allgemein gedacht, d. h. ein bloßer Träger der in vorstehenden Ausdrücken vorkommenden Operationszeichen. Diese Kosinusse und Sinusse sind nur eindeutig. — Unter *Tg* x und *Cotg* x versteht man dann die allgemeinen Quotienten $\frac{Sin\, x}{Cos\, x}$ und $\frac{Cos\, x}{Sin\, x}$.

14) Bezeichnet man aber durch $\frac{1}{Sin}x$, $\frac{1}{Cos}x$, $\frac{1}{Tg}x$, $\frac{1}{Cotg}x$ diejenigen Ausdrücke z, für welche $Sin\, z = x$, oder $Cos\, z = x$, oder $Tg\, z = x$, oder $Cotg\, z = x$ wird, so sind diese Zeichen $\frac{1}{Sin}x$, oder $\frac{1}{Cos}x$ etc. unendlich-viel-deutig, weil sie Ausdrücke vorstellen, welche unendlich-viel-deutige Logarithmen enthalten. Daher ist bei dem Rechnen mit $\frac{1}{Sin}x$, $\frac{1}{Cos}x$ etc. (welche Argumente genannt werden können, gewöhnlich aber Bogen genannt werden) dieselbe Vorsicht anzuwenden, die bei allen mehrdeutigen Formen angewandt werden muß.

15) Die allgemeinste Potenz a^x, in welcher a und x beide, ganz allgemein gedacht, also bloße Träger der Operations-Zeichen sind, hat (da sie die natürliche Potenz $e^{x \cdot log\, a}$ vorstellt) für jeden bestimmten Werth von *log* a nur einen einzigen Werth, aber eben deshalb genau so viele Werthe als *log* a deren hat, d. h. unendlich-viele (nach Nr. 12).

Ist dagegen a positiv gedacht, so kann man einen der unendlich-vielen Werthe des *log* a und zwar den einzigen, der reell ist, bequem absondern durch *L* a bezeichnen, und dann kann man von den unendlich-vielen Werthen der allgemeinen Potenz $\overset{x}{a}$ einen absondern, welcher durch $\overset{x.La}{e}$ ausgedrückt ist, und diesen kann man die künstliche Potenz nennen;

derselben steht dann der **künstliche Logarithme** $\overset{a}{log}\,b$ (wo die Basis a positiv gedacht ist) gegenüber, welcher sich augenblicklich $=\frac{log\,b}{L\,a}$ ausweißt und daher wieder, mit $log\,b$ zugleich unendlich-viel-deutig ist. — Aber auch wenn a negativ oder imaginär ist, kann man einen **einfachsten Werth** der allgemeinen Potenz absondern, der dann eindeutig ist, und dem eine eigene Gattung von Logarithmen wieder gegenüber steht. — Ueber die Nothwendigkeit dieser Absonderung der Begriffe muß die „Erste Abhandlung" selbst nachgelesen werden. In der „Ersten Abhandlung" ist, auch wenn a nicht positiv ist, der **einfachste** Werth von $log\,a$ abgesondert und durch $L\,a$ bezeichnet. So oft a positiv ist, so zeigt sich dieser **einfachste** Werth zugleich als der einzige reelle Werth von $log\,a$.

Der **allgemeinsten Potenz** $\overset{x}{a}$ steht dagegen der **allgemeinste Logarithme** $b\,?\,a$ gegenüber, welcher sich augenblicklich $=\frac{log\,b}{log\,a}$ ausweißt, wo $log\,b$ und $log\,a$ als **natürliche** Logarithmen unendlich-viele Werthe haben, so daß der **allgemeinste** Logarithme unendlichmal unendlich-viele Werthe hat.

Da sich die **künstlichen** und die **allgemeinsten** Logarithmen, mittelst der Gleichungen

$$\overset{a}{log}\,b=\frac{log\,b}{L\,a} \text{ und } b\,?\,a=\frac{log\,b}{log\,a}$$

sogleich auf **natürliche** Logarithmen zurückführen lassen, so braucht man nie mit anderen als natürlichen Logarithmen zu rechnen.

16) die allgemein wahren Formeln für Potenzen, nach denen allein im Allgemeinen sicher gerechnet werden kann, sind aber folgende:

$$1)\ a^x \cdot a^z = a^{x+z} \cdot e^{2(ax+bz)\pi.\sqrt{-1}};$$

$$2)\ a^x : a^z = a^{x-z} \cdot e^{2(ax+bz)\pi.\sqrt{-1}};$$

$$3)\ a^x \cdot b^x = (ab)^x; \quad 4)\ a^x : b^x = (a:b)^x; \text{ und}$$

$$5)\ (a^x)^z = a^{xz} \cdot e^{2az\pi\sqrt{-1}},$$

wo **a** und **b** o und alle ganzen positiven und negativen Zahlen vorstellen, während π wie immer die Zahl 3,14159···· vorstellt, die der kleinste der positiven Werthe von x ist, dessen Sinus = o wird, (und welche, wie sich aber erst später in den Anwendungen der Analysis auf Geometrie ausweißt, zu gleicher Zeit die Länge des Halbkreises vorstellt, dessen Radius = 1 ist).

Die gewöhnlich an der Stelle dieser vorstehenden Formeln (1, 2, 5) gebräuchlichen Formeln, nämlich

$$a^x \cdot a^z = a^{x+z}, \quad a^x : a^z = a^{x-z} \text{ und } (a^x)^z = a^{xz}$$

sind zu einseitig wahr, als daß sie anders als eben nur in den besondern Fällen angewandt werden dürften, in denen sie wahr sind. — In den vorstehenden Gleichungen (1—5) haben aber die Ausdrücke links genau so viele Werthe, wie die zur Rechten des Gleichheitszeichens, und genau dieselben. Nur diese Gleichungen entsprechen daher dem (in Nr. 7 ausgesprochenen) Charakter der Gleichung vollkommen.

Eben so gilt der binomische Lehrsatz in der nachstehenden Form

$$7)\ (1+z)^x = 1^x \cdot \left[1 + \frac{x}{1} \cdot z + \frac{x^{2|-1}}{2!} \cdot z^2 + \frac{x^{3|-1}}{3!} \cdot z^3 + \text{in inf.}\right],$$

(wo 1^x statt $e^{x\,log\,1}$ d. h. statt $e^{2ax\pi\sqrt{-1}}$ d. h. statt $Cos\, 2ax\pi + \sqrt{-1} \cdot Sin\, 2ax\pi$ steht, und im Allgemeinen unendlich-viele Werthe hat, insofern **a** nach und nach o und

alle positiven oder negativen ganzen Zahlen vorstellt) ganz allgemein, d. h. während x wie z bloße Träger der Operations-Zeichen sind, so daß weder von der Konvergenz noch von der Divergenz der unendlichen Reihe, zur Rechten des = Zeichens, die Rede seyn kann.

17) Da man künstliche und allgemeine Logarithmen (nach Nr. 15) allemal auf natürliche Logarithmen zurückführen kann, so braucht man nur allgemein wahre Formeln für die letzteren. Diese sind aber der äußern Form nach von den immer im Gebrauch gewesenen Formeln nicht verschieden,

$$log\,(ab) = log\,a + log\,b;$$

$$log\,(a:b) = log\,a - log\,b;$$

$$log\,\sqrt[m]{a} = \frac{log\,a}{m};$$

nur daß hier die Ausdrücke links und rechts als unendlich-viel-deutig (die $\sqrt[m]{a}$ aber als m deutig) angesehen sind. — Dagegen können $log\,(a^x)$ und $x \cdot log\,a$ nicht unbedingt für einander gesetzt werden, weil $x \cdot log\,a$ im Allgemeinen viel weniger Werthe hat als $log\,(a^x)$.

18) So wie die allgemeine Differenz a—b zu ihrer einfachsten selbstständig bleibenden Form der „negativen Zahl", — und der allgemeine Quotient zu seiner einfachsten selbstständig bleibenden Form der „gebrochenen Zahl" führt, so führt auch die Wurzel $\sqrt[m]{a}$, in welcher der Wurzel-Exponent m als eine wirkliche ganze Zahl gedacht, in welcher der Radikand a dagegen ganz allgemein ist, zu einer einfachsten selbstständigen Wurzel-Form, welche eine „imaginäre Zahl" genannt wird, und diese läßt sich allemal auf $\sqrt{-1}$ zurückführen. — Der Logarithme, wie allgemein er auch gedacht werden mag, führt zu keiner selbstständig bleibenden logarithmischen Form,

sondern es lassen sich alle Endresultate, welche ursprünglich ganzen wirklichen Zahlen ihr Entstehen verdanken, wie zusammengesetzt sie auch immer gedacht werden mögen, doch allemal auf die Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ zurückführen, wo p und q reelle Zahlen sind, welche Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$, weil $q=0$ gedacht werden kann, nicht bloß alle imaginären Zahlen, sondern auch wiederum alle reellen Zahlen in sich schließt.

Alle Ziffern-Ausdrücke auf die Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ bringen, wo p und q reelle, d. h. ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen oder Null sind, ist der einzige Zweck aller Ziffern-Rechnung, und nur mit der Lösung dieser letzteren Aufgabe ist das gemeine Ziffern-Rechnen bis an sein völliges Ende gebracht. Die in den Nr. 8, 9 erwähnten besondern Abtheilungen des Ziffern-Rechnens sind in dieser allgemeinsten Aufgabe mit enthalten.

19) In dem Charakter der Gleichung (Nr. 7) liegt die Nothwendigkeit, daß zwei im Allgemeinen gleiche Ausdrücke, so oft sie ursprünglich wirklichen ganzen Zahlen ihr Daseyn verdanken, d. h. so oft sie in Ziffern-Ausdrücke übergehen, nothwendig eine und dieselbe reelle, oder eine und dieselbe imaginäre Zahl $p+q\cdot\sqrt{-1}$ vorstellen.

20) Aus Gleichungen, in denen (absichtlich) gewisse Buchstaben x, y, z etc. eingeführt sind, welche (völlig oder doch theilweise) bestimmte Ausdrücke repräsentiren, diese Ausdrücke selbst (in so fern sie noch unbekannt sind) zu finden, ist der Zweck der gesammten „Algebra“, so daß also die (niedere und höhere) Algebra als „eine einzige, wenn auch umfassende Aufgabe der Analysis behandelnd“, sich herausstellt.

21) Wenn man mit allgemeinen Ausdrücken und namentlich mit allgemeinen, nach ganzen Potenzen eines noch

allgemein gedachten x fortlaufenden unendlichen Reihen, ganz sicher „rechnet", eben weil das Rechnen es nur mit den Formen zu thun hat, die da am reinsten sind, wo am allgemeinsten (Nr. 6), so darf man doch, sobald die Ausdrücke, also z. B. auch die unendlichen Reihen, in Ziffern-Ausdrücke übergehen (also z. B. in numerische unendliche Reihen) nicht unterlassen, die Fälle im Gedächtniß zu behalten, wo, einer gründlichen Theorie zu Folge, das „Rechnen" aufhört. Dies ist aber der Fall:

a) wenn irgendwo o (Null) im Divisor erscheint;

b) wenn *log* o vorkommt, oder o^x während x noch allgemein, oder entschieden imaginär oder o oder negativ ist;

c) wenn die numerischen unendlichen Reihen divergent sind.

So wie eine dieser Erscheinungen eintritt, so kann man nicht sagen, daß man jetzt unrichtige Resultate habe, sondern es hört bloß das Rechnen mit diesen Erscheinungen als solchen ganz auf, und man muß für diese besonderen Fälle, in denen diese besonderen Erscheinungen eintreten, sogleich eine neue Rechnung anlegen, bei welcher das Eintreten dieser besondern Erscheinungen vermieden wird. So z. B. wenn aus $ax=b$ gefolgert ist $x=\frac{b}{a}$, und wenn nachgehends in diesem Resultate $a=o$ wird, so ist nicht etwa x unendlich groß, sondern man darf das Resultat $x=\frac{b}{o}$ jetzt gar nicht beibehalten, und man muß, im Falle $a=o$ ist, die Frage: „was ist x, wenn $ax=b$ wird" für diesen besondern Fall direkt behandeln. Man findet dann, daß die Gleichung $ax=b$, nun in $o \cdot x=b$, d. h. in $o=b$ übergeht, während letztere den Unbekannten x gar nicht mehr enthält und daß daher nun die Frage selbst, deren Beantwortung gesucht

wird, gar nicht mehr statt finden kann. — Ganz anders ist es, wenn a nicht Null, sondern unendlich-klein ist, also wenn a nicht von der Form p—p, sondern von der Form $\frac{1}{p}$ ist.

22) Wir kommen aber nun zu dem wichtigsten Punkt, der bei dem Uebergange von ganz allgemeinen Betrachtungen und Rechnungen zu besonderen Fällen, nicht genugsam beachtet werden kann. Wenn z. B. im Allgemeinen, wo x noch ein bloßer Träger der Operations-Zeichen ist, der Ausdruck o^x als ein solcher hervortritt, mit dem keine weitere allgemeine Rechnung mehr möglich ist*), so ist doch im Besonderen, wenn x positiv (ganz oder gebrochen) gedacht wird, $o^x = o$, so daß man o statt o^x setzen kann. — Hat man aber letzteres gethan, so ist x nicht mehr allgemein, so daß, wenn dasselbe x in derselben Rechnung noch öfter vorkommt, immer sorgfältig daran gedacht werden muß, daß x nicht mehr allgemein, sondern positiv vorausgesetzt worden ist.

So ist zum Beispiel e^{-a} unter keiner Bedingung der Null gleich; denn wäre $e^{-a} = o$, so wäre $-a = log\, o$, während *log* o eine in der Rechnung nie zuläßige Form ist. Dagegen ist $e^{-a} = \frac{1}{e^a} = \frac{1}{1 + a + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{24}a^4 + \text{in inf.}}$

und dieser Quotient ist einem Bruche gleich, welcher immer kleiner wird, wenn a positiv und dabei immer größer werdend gedacht ist. Nach den allgemeinen Rechnungs-

*) Es ist nämlich nach dem Begriff der allgemeinsten Potenz o^x nichts anderes als $e^{x \cdot log\, o}$ also mit *log* o zugleich, eine im allgemeinen Kalkul unzuläßige Form.

gesetzen wird auch jetzt, wo wir a positiv denken und ohne Ende fort wachsend, noch nicht $e^{-a} = o$, sondern es wird immer e^{-a} einer gebrochenen Zahl gleich, also einer ganz andern Form als der Null; aber in den Anwendungen auf die Größenlehre kann da, wo ausdrücklich nur reelle Zahlen betrachtet werden, diese gebrochene Zahl durch die Null ersetzt werden, so oft a unendlich groß gedacht ist, und bei einem bloß sehr großen und positiven a ist in denselben Anwendungen (bei Vergleichung reeller Zahlen) die Gleichung $e^{-a} = o$ wenigstens Näherungsweise wahr.

23) Also überall wo man sich erlaubt einen Ausdruck für einen andern zu setzen, der nicht nach den allgemeinen Gesetzen der Rechnung jenem andern gleich ist, sondern der nur in Bezug auf gewisse Anwendungen oder überhaupt nur unter gewissen besonderen Voraussetzungen statt jenes anderen gesetzt werden darf — leistet man auf die allgemeine Form und zugleich auf die mit ihr verknüpfte Wohlthat einer unbedingten Allgemeingültigkeit der Rechnung Verzicht und im weiteren Verlauf der Untersuchung muß man von hier ab, die erhaltenen Ausdrücke nur als Ziffernwerthe ansehen und behandeln, die entweder reell oder imaginär aber immer von der Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ sind.

Dies ist also allemal von da ab der Fall, wo man z. B. o statt o^x, oder o statt $\left(\frac{a}{b}\right)^z$ oder statt e^{-z} gesetzt hat, während $\frac{a}{b}<1$ und z positiv und unendlich-groß vorausgesetzt worden war, — oder wo man o statt $\frac{1}{log\,o}$ substituirt

oder ähnliche Substitutionen gemacht hat, die nach dem allgemeinen Verhalten der Operationen zu einander, nicht gerechtfertigt sind, sondern die nur erlaubt sind, in so ferne man bereits überall besondere Ziffern-Ausdrücke an der Stelle der allgemeinen sich denkt.

Die so entstandenen Gleichungen, die nur unter der Voraussetzung gelten, daß in den Ausdrücken links und rechts des Gleichheitszeichens die Buchstaben nicht mehr bloße Träger der Operationszeichen sind, sondern in denen unter den einzelnen Buchstaben Ziffernwerthe bestimmter Art gedacht werden, die entweder reell oder imaginär sind, — oder bloß reell sind, — oder die bloß positiv sind, — oder endlich die gar nur wirkliche ganze Zahlen seyn sollen, alle diese Gleichungen mag man Zahlen-Gleichungen nennen, und sie wohl unterscheiden von den bis jetzt allein betrachteten allgemeingültigen Gleichungen, in denen die Buchstaben bloße Träger der Operationszeichen geblieben sind, und welche zum Unterschiede Formgleichungen genannt werden können*).

*) Es ist bemerkenswerth, mit welchem leichten Sinn (um nicht zu sagen Leichtsinn) oft die ausgezeichnetsten Analysten ∞ statt $\frac{1}{o}$, $-\infty$ statt *log* o, und wohl auch o statt o^x schreiben, und noch andere ähnliche Substitutionen sich erlauben, welche durch die Form-Lehre durchaus nicht gerechtfertigt sind. Entstehen dann in die Augen fallende unrichtige Resultate, so geschieht es noch überdies leicht, daß oft die ersten und einfachsten Wahrheiten, die am festesten stehen, plötzlich in Frage gestellt werden. — So z. B. entwickelt Cauchy (**Résumé des leçons données à l'Ecole Royale polytechnique sur le calcul infinitésimal. Paris 1823. Leç. XXXVIII** zu Ende) die Funktion $e^{-\frac{2}{x}} + e^{-\frac{1}{x^2}}$ mittelst des Maclaurin'schen Lehrsatzes in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe, — und seine gefundene Ent-

24) So wie man in den Gleichungen die Bedeutung der Buchstaben so beschränkt hat, daß die Ausdrücke nur als Ziffern-Ausdrücke von beschränkter Form gedacht werden können, so müssen auch in diesen Gleichungen die etwa vorkommenden unendlichen Reihen, als numerische gedacht werden, und deßhalb auch als konvergente, weil divergente numerische Reihen nicht weiter in der Rechnung beibehalten werden dürfen.

---

wickelung ist bloß dem ersten Theil e^{-x^2} dieser Funktion gleich, so daß ihm während dieser Entwickelung der andere Theil $e^{-\frac{1}{x^2}}$ ganz verloren gegangen ist. Die Ursache davon sucht Cauchy nun in dem Maclaurin'schen Lehrsatz, den er in gewissen Fällen in Zweifel stellt (der nach ihm namentlich nur dann gelten soll, wenn die unendliche Reihe convergent ist), während sie nur darin zu suchen ist, daß er $e^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x = o$ der Null gleich nimmt. Er schließt offenbar so: es ist $\frac{1}{o} = \infty$, also, für $x = o$, auch $e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{o^2}} = e^{-\infty^2} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = o$. Allein dies Alles ist unrichtig, sobald man unsere Ansichten des Kalkuls adoptirt, die wir in der „Ersten Abhandlung" so einfach entwickelt und so streuge erwiesen haben. So wie die im Kalkul unzuläßige Form $\frac{1}{o}$ erscheint, so zeigt dies allemal an, daß dasmal die allgemeinen Rechnungen die, in ihrer Theorie bereits enthaltenen Ausnahmen erleiden. Hier namentlich zeigt die Erscheinung von $\frac{1}{o}$ an, daß es nicht möglich ist, die Funktion $e^{-\frac{1}{x^2}}$ (oder die Funktion $e^{-x^2} + e^{-\frac{1}{x^2}}$) in eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln.

25) Wenn man aber als Grundlage der Differential- und Integral-Rechnung die Aufgabe hinstellt: „die Funktion f_{x+h}, die aus einer beliebigen Funktion f_x hervorgeht, wenn $x+h$ statt x gesetzt wird, in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende unendliche Reihe umzuformen“, — so kommen in dieser Aufgabe noch lauter Formgleichungen vor, in denen die Buchstaben alle noch als bloße Träger der Operationszeichen erscheinen, in denen daher die unendlichen Reihen noch ganz allgemein sind, und deßhalb weder als konvergent noch als divergent angesehen werden.

Da wir nun die gegenwärtige „zweite Abhandlung“ mit dieser so eben angeregten Aufgabe beginnen, so haben wir es hier zunächst und eine weite Strecke in die Abhandlung hinein noch immer mit lauter ganz allgemeingültigen (Form-) Gleichungen zu thun.

26) In der Integralrechnung, wo wir es ebenfalls eine bedeutende Strecke hinein immer nur mit völlig allgemeingültigen (Form-) Gleichungen zu thun haben, muß man aber zuletzt, sollen nicht beständig die Begriffe sich verwirren, zwei Gattungen „bestimmter Integrale“ von einander wohl unterscheiden, die einen, in denen die Buchstaben noch immer bloße Träger der Operationszeichen sind, und mit denen also eine allgemeine Rechnung möglich ist, bei welcher man sich weder um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben, noch um die Convergenz der etwa vorkommenden unendlichen Reihen zu bekümmern braucht; die andern endlich, in welcher die Buchstaben theils bloß als reelle Zahlen, theils aber als reelle oder imaginäre Ziffern-Werthe gedacht werden, und welche eben wegen dieser Beschränkung, überall wo sie erscheinen, nicht mehr Form-Gleichungen sondern Zahlen-Gleichungen bilden, die mit der, dieser Beschränkung entsprechenden Rücksicht, behandelt werden müssen. Wir nennen

die erstere Gattung „allgemein-bestimmte Integrale", die andere dagegen „numerisch-bestimmte"; wir bezeichnen die die erstern durch $\int_{b \div a} f_x \cdot dx$, die andere dagegen durch $\int_a^b f_x \cdot dx$; und wir verstehen unter dem erstern die allgemeine Differenz $\varphi_b - \varphi_a$, wenn $\int f_x \cdot dx = \varphi_x$ gesetzt wird, wo b und a ganz allgemein als bloße Träger der Operationszeichen gedacht sind, während wir bei dem andern $\int_a^b f_x \cdot dx$, die Grenzen a und b uns als Ziffern-Werthe denken und unter dem Integral selbst die Summe aller aus $f_x \cdot dx$ hervorgehenden Werthe verstehen, wenn statt x nach und nach alle zwischen a und b liegenden, um dx von einander verschiedenen Werthe gesetzt werden, während dx selbst $= \frac{b-a}{n}$ und n unendlich-groß gedacht wird.

Diese numerisch-bestimmten Integrale stehen zu den allgemein-bestimmten Integralen in einem ähnlichene Verhältnisse, wie etwa die numerischen unendlichen Reihen zu den allgemeinen unendlichen Reihen. — So wie die numerischen unendlichen Reihen nicht immer einen Werth haben, so ist dasselbe auch mit den numerisch-bestimmten Integralen der Falle; und so wie die Werthe der numerischen und konvergenten Reihen aus den Summen (vgl. erste Abhandlung pag. 84 seqq.) der allgemeinen Reihen erhalten werden, aus denen die numerischen Reihen hervorgegangen sind, — so erhält man auch den Werth eines numerisch-bestimmten Integrals, wenn ein solcher existirt, aus dem allgemein-bestimmten Integral, dem das erstere entspricht.

27) Indem man aber dies letztere beweißt, kann man statt der numerisch-bestimmten Integrale die ihnen gleichen

allgemein-bestimmten Integrale setzen und hat dadurch die allgemeine Rechnung, die mit letzteren erlaubt ist, gewissermaßen auch für die ersteren in Anspruch genommen, so oft ihr Werth existirt. — Zu den Bedingungen dieser Existenz gehört aber natürlich auch die, daß die etwa vorkommenden unendlichen Reihen konvergent seyn müssen, weil sie nur als numerische gedacht werden können, und mit divergenten numerischen Reihen keine weitere Rechnung erlaubt ist.

Auf diese Weise bildet sich ein allgemeines, in seinem Verlaufe ungehemmtes Rechnen auch mit bestimmten Integralen, obgleich bereits Bedingungen der Existenz der numerisch-bestimmten vorhanden sind, so lange man nur immer mit den, an die Stelle der letztgenannten zu setzenden allgemein-bestimmten, Integralen rechnet.

28) Wir beschließen diese Einleitung mit einigen von nun an nöthig gewordenen Bezeichnungen und Relationen, welche der geneigte Leser sorgfältig festhalten wolle.

Während wir nämlich durch die Zeichen

$$\frac{1}{Sin}x,\quad \frac{1}{Cos}x,\quad \frac{1}{Tg}x,\quad \frac{1}{Cotg}x$$

bezüglich die unendlich-vielen allgemeinen (reellen oder imaginären) Bogen (Argumente) bezeichnen, deren

Sinus, Cosinus, Tangente, Cotangente

bezüglich dem allgemein gedachten (also auch reellen oder imaginären) Ausdruck x gleich ist, — bezeichnen wir, wenn x beliebig reell, und im Falle es der Werth eines Sinus oder Cosinus seyn soll, auch noch (abgesehen von Vorzeichen) nicht größer als 1 ist,

a) durch *Arc sin.* x, *Arc tg.* x, *Arc cotg.* x

den {positiven / negativen} und an sich kleisten Bogen, dessen

	Sinus,	Tangente,	Cotangente

den $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ gegebenen Werth x hat; — und

b) durch *Arc cos.* x

den kleinsten positiven Bogen, dessen Cosinus diesen Werth x hat.

Es sind daher *Arc sin.* x, *Arc tg.* x, *Arc cotg.* x (mit x zugleich) bald positiv bald negativ, aber an sich allemal kleiner als $\frac{1}{2}\pi$, oder $=\frac{1}{2}\pi$; dagegen liegt *Arc cos.* x im ersten oder zweiten Quadranten, je nachdem x positiv oder negativ gegeben ist.

Aus diesen Definitionen geht sogleich hervor:

$Arc\,sin.\,0 = Arc\,tg.\,0 = 0$; $Arc\,cos.\,0 = Arc\,cotg.\,0 = \frac{1}{2}\pi$;

$Arc\,sin.\,\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi$; $Arc\,sin.\,(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}\pi$;

1) $Arc\,sin.\,(-\mu) = -Arc\,sin.\,\mu$;

$Arc\,cos.\,1 = 0$; $Arc\,cos.\,(-1) = \pi$;

2) $Arc\,cos.\,(-\mu) = \pi - Arc\,cos.\,\mu$;

$Arc\,tg.\,1 = \frac{1}{4}\pi$; $Arc\,tg.\,(-1) = -\frac{1}{4}\pi$;

3) $Arc\,tg.\,(-\mu) = -Arc\,tg.\,\mu$;

$Arc\,cotg.\,1 = \frac{1}{4}\pi$; $Arc\,cotg.\,(-1) = -\frac{1}{4}\pi$;

4) $Arc\,cotg.\,(-\mu) = -Arc\,cotg.\,\mu$.

Man findet ferner leicht

I. $\frac{1}{Sin}\,x = \left\{\begin{matrix} 2\nu\pi + Arc\,sin.\,x \\ (2\nu+1)\pi - Arc\,sin.\,x \end{matrix}\right\}$; *)

II. $\frac{1}{Cos}\,x = 2\nu\pi \pm Arc\,cos.\,x$; **)

---

*) Raabe in seiner Differential- und Integral-Rechnung drückt im I. Th. pag. 202 alle Werthe des Bogens, dessen Sinus $= x$ ist, bloß durch $2\nu\pi + Arc\,sin.\,x$ aus; dies kann aber nur dann geschehen, wenn man *Arc sin.* x zwei-werthig nimmt, nämlich im ersten und zweiten Quadranten zugleich.

**) Diese beiden Formeln I und II haben nur Sinn, wenn x an

$$\text{III.} \quad \frac{1}{Tg}\, x = \nu\pi + Arc\, tg.\, x;$$

$$\text{IV.} \quad \frac{1}{Cotg}\, x = \nu\pi + Arc\, cotg.\, x,$$

wenn nur statt ν nach und nach Null, so wie jede positive und auch jede negative ganze Zahl gesetzt wird.

Diese Gleichungen sind vollkommene (vollständige) Gleichungen, die rechts nicht mehr und genau dieselben Werthe haben, als die Ausdrücke zur Linken vorstellen.

Ferner mag man noch festhalten, wenn x positiv ist

$$\text{V.} \quad Arc\, sin. x = Arc\, cos.(+\sqrt{1-x^2}) = \pi - Arc\, cos.(-\sqrt{1-x^2})$$

$$= Arc\, tg. \frac{x}{+\sqrt{1-x^2}} = -Arc\, tg. \frac{x}{-\sqrt{1-x^2}}$$

$$= Arc\, cotg. \frac{+\sqrt{1-x^2}}{x} = -Arc\, cotg. \frac{-\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\text{VI.} \quad Arc\, cos. x = Arc\, sin.(+\sqrt{1-x^2}) = -Arc\, sin.(-\sqrt{1-x^2})$$

$$= Arc\, tg. \frac{+\sqrt{1-x^2}}{x} = -Arc\, tg. \frac{-\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$= Arc\, cotg. \frac{x}{+\sqrt{1-x^2}} = -Arc\, coty. \frac{x}{-\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{VII.} \quad Arc\, tg. x = Arc\, cotg. \frac{1}{x}$$

$$= Arc\, sin. \frac{x}{+\sqrt{1+x^2}} = -Arc\, sin \frac{x}{-\sqrt{1+x^2}}$$

$$= Arc\, cos. \frac{1}{+\sqrt{1+x^2}} = \pi - Arc\, cos. \frac{1}{-\sqrt{1+x^2}}$$

---

sich kleiner oder höchstens gleich 1 ist. Für den Fall, daß x positiv oder negativ, aber an sich größer als 1 seyn sollte, treten die Formeln I. 3 II. 3 der Nr. 31 an deren Stelle.

$$\text{VIII. } Arc\,cotg.\,x = Arc\ tg.\,\frac{1}{x}$$

$$= Arc\ sin.\,\frac{1}{+\sqrt{1+x^2}} = -\,Arc\ sin.\,\frac{1}{-\sqrt{1+x^2}}$$

$$= Arc\,cos.\,\frac{x}{+\sqrt{1+x^2}} = \pi - Arc\,cos.\,\frac{x}{-\sqrt{1+x^2}}$$

Ist x negativ, so gelten diese Gleichungen nicht mehr alle; nimmt man aber 1—4 zu Hilfe, so kann man die Rechnungen immer so einrichten, daß x positiv ist.

Die Quadratwurzeln in diesen Formeln sind alle nur eindeutig und positiv zu nehmen.

29) Ein beliebiger, aus gegebenen reellen oder imaginären Zahlen zusammengesetzter Ausdruck (der also eigentlich immer aus ursprünglich ganzen Zahlen mittelst der 7 Operationen zusammengesetzt ist) heißt ausgerechnet, d. h. zu Ende gerechnet (vgl. Nr. 4), wenn er so lange umgeformt ist, bis er zuletzt die einfachste Form $x+z\cdot i$ angenommen hat, wo x und z reell, i aber $\sqrt{-1}$ vorstellt.

Wir haben in der „ersten Abhandlung" die Ausdrücke

$$log(p+q\cdot i),\quad \sqrt[m]{p+q\cdot i}\quad \text{und}\quad (p+q\cdot i)^{\alpha+\beta.i}$$

ausgerechnet, und gefunden (§§. 57, 58, 64)

1) $log\,(p+q\cdot i) = L\,r + (2\nu\pi+\varphi)\cdot i$

2) $\sqrt[m]{p+q\cdot i} = \sqrt[m]{r} \times \left(Cos\,\frac{2\nu\pi+\varphi}{m} + i\cdot Sin\,\frac{2\nu\pi+\varphi}{m}\right)$

3) $(p+q\cdot i)^{\alpha+\beta.i} = e^{\alpha.Lr-\beta(2\nu\pi+\varphi)} \times$

$$\Big(Cos\,[\beta\cdot L\,r+\alpha(2\nu\pi+\varphi)] + i\cdot Sin[\beta\cdot Lr+\alpha(2\nu\pi+\varphi)]\Big),$$

wo α, β, p, q reell gegeben sind, wo *log* den natürlichen Logarithmen, und *L* den reellen Werth desselben, wo i die $\sqrt{-1}$, wo ferner e die Basis der natürlichen Logarithmen, wo r den positiven Werth von $\sqrt{p^2+q^2}$ vorstellt; — wenn

ferner π den kleinsten positiven Bogen bedeutet, dessen Sinus, $=0$, dessen Kosinus aber $=-1$ ist, und wenn φ den kleinsten positiven, innerhalb der 4 ersten Quadranten liegenden Bogen bedeutet, so daß $Cos\ \varphi = \frac{p}{r}$ und $Sin\ \varphi = \frac{q}{r}$ ist*), wenn endlich statt ν nach und nach Null und jede positive, wie negative ganze Zahl gesetzt gedacht wird. Aber eben so muß man auch die 8 Ausdrücke

$$Sin(p+q\cdot i),\ Cos(p+q\cdot i),\ Tg(p+q\cdot i),\ Cotg(p+q\cdot i)$$

$$\frac{1}{Sin}(p+q\cdot i),\ \frac{1}{Cos}(p+q\cdot i),\ \frac{1}{Tg}(p+q\cdot i),\ \frac{1}{Cotg}(p+q\cdot i)$$

ausrechnen, d. h. auf die Form $x+z\cdot i$ bringen können. Mit diesen letztern 8 Aufgaben wollen wir uns daher hier noch beschäftigen.

30) Zuerst findet man

1) $Sin(p+q\cdot i) = Sin\,p\cdot Cos(qi) + Cos\,p\cdot Sin(qi)$

2) $Cos(p+q\cdot i) = Cos\,p\cdot Cos(qi) - Sin\,p\cdot Sin(qi)$

während

3) $Sin(qi) = \frac{1}{2}(e^{q} - e^{-q})\cdot i$

4) $Cos(qi) = \frac{1}{2}(e^{q} + e^{-q})$

ist, so daß man sogleich erhält:

---

*) Man findet bei andern Schriftstellern diesen Bogen φ, weil sich auch $Tg\ \varphi = \frac{q}{p}$ ergiebt, durch $Arc\ tg.\frac{q}{p}$ ausgedrückt. Dies ist jedoch nicht ganz genau; weil wenn wir $Arc\ tg.\frac{q}{p}$ in unserem hiesigen Sinne nehmen, dieser Bogen im ersten Quadranten liegt, wenn $\frac{q}{p}$ positiv ist, also wenn q und p beide positiv oder beide negativ sind, während φ im ersten Fall im ersten, im anderen Falle aber im dritten Quadranten genommen werden muß. — Analoges gilt, wenn q und p verschiedene Vorzeichen haben.

I. $Sin(p+q\cdot i) = \frac{1}{2}(e^{q} + e^{-q})\cdot Sin\, p + \frac{1}{2}i\cdot(e^{q} - e^{-q})\cdot Cos\, p$;

II. $Cos(p+q\cdot i) = \frac{1}{2}(e^{q} + e^{-q})\cdot Cos\, p - \frac{1}{2}i\cdot(e^{q} - e^{-q})\cdot Sin\, p$.

Ferner findet man

5) $Tg(p+q\cdot i) = \frac{Tg\, p + Tg\,(q\cdot i)}{1 - Tg\, p\cdot Tg\, q\cdot i}$,

6) $Cotg(p+q\cdot i) = \frac{1}{Tg\,(p+q\cdot i)}$,

während

7) $Tg(q\cdot i) = \frac{Sin\,(q\cdot i)}{Cos\,(q\cdot i)} = i\cdot \frac{e^{q} - e^{-q}}{e^{q} + e^{-q}} = i\cdot \frac{e^{2q} - 1}{e^{2q} + 1}$

ist. Daher hält man

III. $Tg(p+q\cdot i) = \frac{2\cdot e^{2q}\cdot Sin\, 2p}{e^{4q} + 2e^{2q}\cdot Cos\, 2p + 1} + \frac{e^{4q} - 1}{e^{4q} + 2e^{2q}\cdot Cos\, 2p + 1}\cdot i$;

IV. $Cotg(p+q\cdot i) = \frac{2\cdot e^{2q}\cdot Sin\, 2p}{e^{4q} - 2e^{2q}\cdot Cos\, 2p + 1} - \frac{e^{4q} - 1}{e^{4q} - 2e^{2q}\, Cos\, 2p + 1}\cdot i$.

31) Wir kommen nun zur Lösung der vier übrigen Aufgaben.

I. Soll

1) $\frac{1}{Sin}(p+q\cdot i) = x + zi$

gefunden werden, so hat man

$Sin(x+z\cdot i) = (p+q\cdot i)$

d. h.

$\frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})\cdot Sin\, x + \frac{1}{2}i\cdot(e^{z} - e^{-z})\cdot Cos\, x = p + q\cdot i$;

und diese Gleichung zerfällt in

2) $\frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})\cdot Sin\, x = p$

und

3) $\frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}).Cos\, x = q$.

Diese Gleichungen führen zu

4) $e^{z} = \frac{p}{Sin\,x} + \frac{q}{Cos\,x}$ und 5) $e^{-z} = \frac{p}{Sin\,x} - \frac{q}{Cos\,x}$,

oder, wenn man beide mit einander multiplicirt,

6) $1 = \frac{p^2}{Sin\,x^2} - \frac{q^2}{Cos\,x^2}$.

Daraus folgt

7) $(Sin\,x)^2 = \frac{1}{2}(p^2+q^2+1) - \frac{1}{2}\sqrt{(p^2+q^2)^2 - 2p^2+2q^2+1}$

8) $(Cos\,x)^2 = -\frac{1}{2}(p^2+q^2-1)+\frac{1}{2}\sqrt{(p^2+q^2)^2-2p^2+2q^2+1}$

wo die Quadratwurzel ihren positiven (absoluten) Werth vorstellt; — und man überzeugt sich bald, daß diese Werthe von $(Sin\,x)^2$ und $(Cos\,x)^2$ wirklich positiv und auch nie >1 sind*), so daß allemal reelle Werthe von x existiren, und dann unendlich viele, welche diesen Gleichungen 7 und 8 genügen.

---

*) Erstens: der Radikand $(p^2+q^2)^2-2p^2+2q^2+1$ ist allemal positiv, weil er auch so: $(p^2+q^2-1)^2+4q^2$ geschrieben werden kann; und weil derselbe Radikand auch so $(p^2+q^2+1)^2-4p^2$ geschrieben werden kann, so folgt zweitens, daß $Sin\,x^2$ und und $Cos\,x^2$ aus 7 und 8 allemal positiv werden. — Daß aber drittens diese Ausdrücke für $Sin\,x^2$ und $Cos\,x^2$ (in 7 u. 8) allemal $\overline{\leq}1$ sind, kann so bewiesen werden. Man bezeichne den Radikanden der Quadratwurzel durch R, und man setze den Ausdruck für $Sin\,x^2$ in 7, $=1+v$, so hat man

$$\tfrac{1}{2}(p^2+q^2+1)-\tfrac{1}{2}\sqrt{R}=1+v,$$

also

$$\tfrac{1}{2}(p^2+q^2-1)=v+\tfrac{1}{2}\sqrt{R}.$$

Quadrirt man, so ergiebt sich

$$\tfrac{1}{4}(p^2+q^2-1)^2=v^2+v\sqrt{R}+\tfrac{1}{4}R;$$

also, wenn statt R sein Werth $(p^2+q^2-1)^2+4q^2$ gesetzt wird, $o=q^2+v^2+v.\sqrt{R}$, woraus, wenn $q=o$ auch $v=o$, außerdem aber v nothwendig als negativ sich ausweißt. Gerade so beweißt man aber auch, daß der Ausdruck in 8 hier $Cos\,x^2 \overline{\leq}1$ sein müsse.

Das Vor-Zeichen von $Sin\,x$ muß so genommen werden (nach 2), daß $\frac{p}{Sin\,x}$ positiv wird; weil sonst z nicht reell werden würde, das Vorzeichen von $Cos\,x$ dagegen kann positiv und negativ zugleich genommen werden, nur muß $\frac{p}{Sin\,x} \pm \frac{q}{Cos\,x}$ allemal positiv werden (wegen 4 und 5), welches jedoch für die aus 7 und 8 entnommenen Werthe von $Sin\,x$ und $Cos\,x$ allemal der Fall ist, da man allemal $\frac{p^2}{Sin\,x^2} > \frac{q^2}{Cos\,x^2}$ findet (nach 6).

Man findet daher für x zunächst zwei Bogen, die im ersten und zweiten Quadranten liegen, wenn p positiv gegeben ist, die aber im dritten und vierten Quadranten liegen werden, wenn p negativ gegeben seyn sollte. Wird daher

$$9)\quad Arc\,sin.\left(\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(p^2+q^2+1)-\tfrac{1}{2}\sqrt{(p^2+q^2+1)^2-4p^2}}\right)$$

durch φ bezeichnet, so aber daß φ mit p zugleich positiv oder negativ genommen wird, so sind diese beiden Werthe von x, wenn p (also φ) positiv ist, durch φ und $\pi-\varphi$, wenn aber p (also φ) negativ ist, durch $2\pi+\varphi$, und $\pi-\varphi$ ausgedrückt; also daß man alle Werthe von x aus der Gleichung

$$10)\quad x = \begin{cases} 2\nu\pi+\varphi \\ (2\nu+1)\pi-\varphi \end{cases}$$

findet, während ν nach und nach o und jede positive, wie negative ganze Zahl vorstellt. Dazu findet sich aber

$$11)\quad z = L\left(\frac{p}{Sin\,x}+\frac{q}{Cos\,x}\right) = L\left(\frac{p}{Sin\,\varphi} \pm \frac{q}{Cos\,\varphi}\right),$$

wo das obere (+) Zeichen gilt, wenn x von der Form $2\nu\pi+\varphi$, das untere (−) Zeichen dagegen, wenn x von der Form $(2\nu+1)\pi-\varphi$ genommen wird, während φ mit p zugleich positiv oder negativ ist.

Man findet daher

$$\text{I. 1.} \quad \frac{1}{Sin}(p+q\cdot i)=2\nu\pi+\varphi+i\cdot L\left(\frac{p}{Sin\,\varphi}+\frac{q}{Cos\,\varphi}\right)$$

$$\text{und noch} =(2\nu+1)\pi-\varphi-i\cdot L\left(\frac{p}{Sin\,\varphi}+\frac{q}{Cos\,\varphi}\right)^{*}$$

wo φ mit p zugleich positiv oder negativ genommen ist, so daß $\frac{p}{Sin\,\varphi}$ allemal positiv wird.

Dieses Resultat erleidet eine Ausnahme a) wenn $Sin\,\varphi=o$ und b) wenn $Cos\,\varphi=o$ d. h. $Cos\,x=o$ ist; also a) wenn $p=o$, und b) wenn $q=o$ ist.

Ist nun

a) $p=o$, soll also $\frac{1}{Sin}(q\cdot i)$ gefunden werden, so geben die Gleichungen 2 und 3 sogleich

$$Sin\,x=o; \qquad Cos\,x=\pm 1;$$

$$e^{z}-e^{-z}=\pm 2q; \qquad e^{z}=\pm q+\sqrt{q^2+1}$$

also

$$z=L\left(\pm q+\sqrt{q^2+1}\right)$$

wo alle obern oder alle untern Vorzeichen zusammengehören. Wird nun in z das obere (+) Zeichen genommen, so ist $Cos\,x=+1$ gewesen, also $x=2\nu\pi$; wird aber in z das untere (−) Zeichen genommen, so ist $Cos\,x=-1$ gesetzt, und $x=(2\nu+1)\pi$. Man hat also

---

*) Es ist nämlich wegen der 6,

$$L\left(\frac{p}{Sin\,\varphi}-\frac{q}{Cos\,\varphi}\right)=-L\left(\frac{p}{Sin\,\varphi}+\frac{q}{Cos\,\varphi}\right).$$

Man kann endlich dies Resultat I. 1 auch so schreiben

$$\frac{1}{Sin}(p+q.i)=\nu\pi\pm\left[\varphi+i.L\left(\frac{p}{Sin\,\varphi}+\frac{q}{Cos\,\varphi}\right)\right],$$

wo das obere Vorzeichen genommen wird, wenn ν Null oder gerade, wo aber dies untere Vorzeichen genommen wird, wenn ν ungerade genommen ist.

$$\frac{1}{Sin}(q\cdot i) = 2\nu\pi + i\cdot L\left(q+\sqrt{q^2+1}\right)$$

$$\text{und noch} = (2\nu+1)\pi - i\cdot L\left(q+\sqrt{q^2+1}\right)^{*)}$$

wo ν Null und jede positive oder negative ganze Zahl vorstellt, oder es ist

$$\text{I. 2.}\quad \frac{1}{Sin}(q\cdot i) = \nu\pi \pm i\cdot L\left(q+\sqrt{q^2+1}\right),$$

in welcher letzteren Gleichung das (+) Zeichen gilt, wenn ν gerade oder Null, das (−) Zeichen dagegen, wenn ν ungerade genommen wird.

Ist aber

b) $q=o$, soll also $\frac{1}{Sin}p$ gefunden werden, wo p beliebig positiv oder negativ, und an sich größer, gleich oder kleiner als 1, oder auch Null seyn mag, — so giebt die Gleichung 3 für diesen Fall direkt entweder $e^{z} - e^{-z} = o$, oder $Cos\, x = o$.

Die erstere Annahme giebt $z=o$ und die zweite giebt dann $Sin\, x = p$ dazu, welches, damit x reell werde, voraussetzt, daß der Werth von p, abgesehen von seinem Vorzeichen, $\overline{\overline{<}}\,1$ gegeben ist. In diesem Falle findet man also

$$\text{I. 3.}\quad \frac{1}{Sin}p = 2\nu\pi + Arc\,sin.\,p$$

$$\text{und noch} = (2\nu+1)\pi - Arc\,sin\;p.$$

Ist aber der absolute Werth von p (also abgesehen vom Vorzeichen), $\overline{\overline{>}}\,1$, so hat man

$$Cos\,x = o \quad\text{und}\quad Sin\,x = \pm 1,$$

je nachdem p $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ gegeben ist. Daraus folgt

---

*) Es ist nämlich $\left(q+\sqrt{q^2+1}\right)\left(-q+\sqrt{q^2+1}\right) = 1.$

$$\tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \pm p; \quad e^z = \pm p + \sqrt{p^2 - 1}$$

und $$z = L\left(\pm p + \sqrt{p^2 - 1}\right),$$

wo $\pm p$ den absoluten Werth von p vorstellt, während die Quadratwurzel noch beide Werthe hat. Zu $Sin\, x = \pm 1$ gehört ferner $x = (2\nu \pm \tfrac{1}{2})\pi$, so daß man hat, wenn der absolute Werth von p, $\geqq 1$ ist,

$$\text{I. 4.} \quad \frac{1}{Sin} p = (2\nu \pm \tfrac{1}{2})\pi + i \cdot L\left(\pm p + \sqrt{p^2 - 1}\right),$$

wo alle obern (+) Zeichen gelten, wenn p positiv gegeben ist, alle untern (—) Zeichen dagegen, wenn p negativ gegeben seyn sollte, während in dem einen wie in dem andern Falle die Quadratwurzel $\sqrt{p^2 - 1}$, noch ihre beiden Werthe hat, so daß zu jedem Werthe von ν zwei Werthe von $\frac{1}{Sin} p$ sich ergeben.

Dabei kann man noch $-L\left(\pm p + \sqrt{p^2 - 1}\right)$ statt $+L\left(\pm p - \sqrt{p^2 - 1}\right)$ schreiben, weil $\left(\pm p + \sqrt{p^2 - 1}\right)\left(\pm p - \sqrt{p^2 - 1}\right) = 1$ ist*).

II. Eben so findet man aber

---

*) In Raabe's Differential- und Integral-Rechnung Th. I. pag. 165 findet man für diesen Fall

$$\frac{1}{Sin} p = (2\nu + 1)\frac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2} i \, log \frac{p - \sqrt{p^2 - 1}}{p + \sqrt{p^2 - 1}}$$

Diese Formel stimmt mit der obigen überein, wenn man in ihr statt ν Null oder eine gerade Zahl setzt, so oft p positiv, dagegen ν ungerade nimmt, so oft p negativ gegeben ist. Ohne diese Beschränkung würde diese eben citirte Formel unrichtige Resultate liefern, z. B. sogleich für $p = -1$, wenn man dabei $\nu = 0$ oder $\nu = 2$ oder $\nu = 4$ etc. nehmen wollte, während sie für $\nu = 1$, 3, 5 etc. ein richtiges Resultat liefert (wenn $p = -1$).

II. 1. $\frac{1}{Cos}(p+q\cdot i) = 2\nu\pi \pm \varphi \pm i\cdot L\left(\frac{p}{Cos\,\varphi} - \frac{q}{Sin\,\varphi}\right)$,

wo entweder alle obern (+) Zeichen zugleich, oder alle untern (—) Zeichen zugleich gelten, während φ gegeben ist durch die Gleichung

$$\varphi = Arc\,cos.\left(\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(p^2+q^2+1) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(p^2+q^2+1)^2 - 4p^2}}\right)$$

in dieser letztern Gleichung gilt aber das obere (+) Zeichen (so daß φ im ersten Quadranten liegt), wenn p positiv ist, dagegen das untere (—) Zeichen (so daß φ im zweiten Quadranten liegt), wenn p negativ gegeben ist.

Eben so findet man in den Ausnahmsfällen

$$\frac{1}{Cos}(q\cdot i) = (2\nu+\tfrac{1}{2})\pi + i\cdot L\left(-q+\sqrt{q^2+1}\right)$$

$$\text{und noch} = (2\nu-\tfrac{1}{2})\pi - i\cdot L\left(-q+\sqrt{q^2+1}\right)$$

oder auch

II. 2. $\frac{1}{Cos}(q\cdot i) = (\nu+\tfrac{1}{2})\pi \pm i\cdot L\left(-q+\sqrt{q^2+1}\right)$,

wobei in der letztern Gleichung das obere (+) Zeichen gilt, wenn $\nu = o$ oder gerade, das untere (—) Zeichen dagegen, wenn ν ungerade genommen ist. Die $\sqrt{q^2+1}$ kann aber nur positiv genommen werden.

Ferner findet sich, wenn der absolute Werth von p, $\overline{\overline{<}}1$ ist,

II. 3. $\frac{1}{Cos}\,p = 2\nu\pi \pm Arc\,cos.\,p$,

(wo $Arc\,cos.\,p$ im ersten oder zweiten Quadranten genommen wird, je nachdem p positiv oder negativ genommen ist).

Ist dagegen der absolute Werth von p, $\overline{\overline{>}}1$, so ergiebt sich

II. 4. $\frac{1}{Cos}\,p = \left\{\begin{matrix} 2\nu\pi + i\cdot L\left(p+\sqrt{p^2-1}\right) \\ (2\nu+1)\pi + i\cdot L\left(-p+\sqrt{p^2-1}\right)\end{matrix}\right\}$

je nachdem p $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ gegeben ist, während $\sqrt{p^2-1}$ noch ihre beiden Werthe vorstellt.

III. Soll

$$1)\quad \frac{1}{Tg}(p+q\cdot i)=x+z\cdot i$$

gefunden werden, so hat man

$$2)\quad p+q\cdot i=Tg(x+z\cdot i)=\frac{Tg\,x+Tg\,z\cdot i}{1-Tg\,x\cdot Tg(z\cdot i)},$$

während

$$3)\quad Tg(z\cdot i)=f\cdot i \text{ ist, sobald } 4)\quad f=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}$$

gesetzt wird. Dies giebt die Gleichungen

$$5)\quad p+q\cdot f\cdot Tg\,x=Tg\,x;$$

$$6)\quad q-p\cdot f\cdot Tg\,x=f.$$

Eliminirt man hieraus f, so erhält man

$$p\cdot Tg\,x^2-(p^2+q^2-1)\cdot Tg\,x-p=o,$$

woraus sich ergiebt

$$7)\quad Tg\,x=\frac{p^2+q^2-1+\sqrt{(p^2+q^2-1)^2+4p^2}}{2p}$$

Zu diesen beiden reellen Werthen von $Tg\,x$ giebt nun die Gleichung 6 sogleich

$$8)\quad f=\frac{(p^2+q^2+1)-\sqrt{(p^2+q^2+1)^2-4q^2}}{2q}$$

Weil aber aus 4

$$9)\quad z=\tfrac{1}{2}L\left(\frac{1+f}{1-f}\right)$$

hervorgeht, so muß $\pm f<1$ genommen werden; also muß in 7 und 8 die Quadrat-Wurzel ihren positiven Werth allein

vorstellen*), und dabei ist f mit q zugleich positiv oder negativ. Deshalb findet sich

$$z = \frac{1}{4} L \left(\frac{p^2+(1+q)^2}{p^2+(1-q)^2} \right($$

und

$$\text{III. 1. } \frac{1}{Tg}\ p+q\cdot i) = \nu\pi + \varphi + \frac{1}{4} i \cdot L \left(\frac{p^2+(1+q)^2}{p^2+(1-q)^2} \right),$$

wenn $\varphi = Arc\,tg \dfrac{p^2+q^2-1+\sqrt{(p^2+q^2-1)^2+4p^2}}{2p}$

ist und $\sqrt{(p^2+q^2-1)^2+4p^2}$ ihren positiven Werth bedeutet, und wenn statt ν nach und nach Null und jede positive wie negative ganze Zahl gesetzt wird. Weil der Zähler von φ immer positiv ist, so ist φ mit p zugleich positiv oder negativ.

Betrachtet man wieder den Ausnahmswerth, wo $p = o$, so geben die Gleichungen 5 und 6, wenn man mit *Cos* x wegmultiplicirt, so daß sie die Form

---

*) Es ist $o < p^2 + (q-1)^2$ d. h. $2q < p^2 + q^2 + 1$. — Ist nun q positiv, so ist auch, wenn man links und rechts mit 4q multiplicirt, dann beide Seiten von $(p^2+q^2+1)^2 + 4q^2$ subtrahirt — $(p^2+q^2+1)^2 - 4q^2 > (p^2+q^2+1)^2 - 4q(p^2+q^2+1) + 4q^2$, also wenn man die Wurzel auszieht

$$+\sqrt{(p^2+q^2+1)^2-4q^2} > p^2+q^2+1-2q \text{ d. h.}$$
$$2q > p^2+q^2+1-\sqrt{(p^2+q^2+1)^2-4q}$$

also, wenn man durch 2q dividirt, $1 > f$, sobald man in f die Wurzel positiv nimmt.

Eben so findet man $-\sqrt{(p^2+q^2+1)^2-4q^2} < p^2+q^2+1-2q$, also $2q < p^2+q^2+1+\sqrt{(p^2+q^2+1)^2-4q^2}$ mithin $1 < f$, wenn mann in f die Wurzel negativ nimmt. Aehnliche Beweise lassen sich führen, wenn q negativ gedacht ist.

5) $p \cdot Cos\, x + q \cdot f \cdot Sin\, x = Sin\, x$

und 6) $q \cdot Cos\, x - p \cdot f \cdot Sin\, x = f \cdot Cos\, x$

annehmen, jetzt

10) $q \cdot f \cdot Sin\, x = Sin\, x$ und 11) $q \cdot Cos\, x = f \cdot Cos\, x$.

Die erstere dieser Gleichungen giebt sogleich entweder $Sin\, x = o$ oder $f = \frac{1}{q}$.

Zu $Sin\, x = o$ kommt (aus 11) $f = q$, so wie $Cos\, x = \pm 1$; weil aber (wegen der 9) $\pm f < 1$ werden muß, so folgt, daß diese Werthe nur statt haben können, wenn der absolute Werth von q, < 1 ist. Man findet daher in diesem Falle

$$\text{III. 2. } \frac{1}{Tg}(q \cdot i) = \nu\pi + \tfrac{1}{2} \cdot L\left(\frac{1+q}{1-q}\right), \text{ (wo } \pm q < 1)$$

Zu $f = \frac{1}{q}$, welches $\pm q > 1$ voraussetzt, gehört (aus 11), $Cos\, x = o$, also $Sin\, x = \pm 1$, und man findet daher in diesem anderen Falle

$$\text{III. 3. } \frac{1}{Tg}(q \cdot i) = (2\nu \pm \tfrac{1}{2})\pi + \tfrac{1}{2} i \cdot L\left(\frac{q+1}{q-1}\right), \text{ (wo } \pm q > 1)$$

für $p = o$ und $q = \pm 1$ hat die Aufgabe keine Lösung, weil x unbestimmt bleibt und entweder $e^{-z} = o$ oder $e^{z} = o$ werden müßte, so daß also $\frac{1}{Tg}(\pm i)$ in der Form $x + z \cdot i$ nicht existirt.

Ist endlich $q = o$, so geben die Gleichungen 5 und 6

$$p = Tg\, x \text{ und } f = o,$$

und man erhält

$$\text{III. 4. } \frac{1}{Tg} p = \nu\pi + Arc\, tg.\, p.$$

IV. Endlich findet sich

IV. 1. $\frac{1}{Cotg}(p+q\cdot i)=\nu\pi+\varphi+\frac{1}{4}i\cdot L\left(\frac{p^2+(1-q)^2}{p^2+(1+q)^2}\right)$,

wenn

$$\varphi = Arc\,cotg.\ \frac{p^2+q^2-1+\sqrt{(p^2+q^2-1)^2+4p^2}}{2p}$$

genommen wird, wo die Quadratwurzel bloß ihren positiven Werth vorstellt, so daß φ mit p zugleich positiv oder negativ ist.

Ist aber p = o, so findet sich

IV. 2. $\frac{1}{Cotg}(q\cdot i)=(\nu+\frac{1}{2})\pi+\frac{1}{2}i\cdot L\left(\frac{1-q}{1+q}\right)$,

wenn der absolute Werth von q, <1 ist; dagegen

IV. 3. $\frac{1}{Cotg}(q\cdot i)=\nu\pi+\frac{1}{2}i\cdot L\left(\frac{q-1}{q+1}\right)$,

wenn der absolute Werth von q, >1 ist.

Für p = o und $q=\pm 1$ ist eine Auflösung der Aufgabe nicht möglich, und es gehört daher $\frac{1}{Cotg}(\pm i)$ eben so wie $\frac{1}{Tg}(\pm i)$ zu denjenigen Formen, mit denen nicht weiter gerechnet werden kann.

Ist endlich q = o, so findet sich noch

IV. 4. $\frac{1}{Cotg}\,p=\nu\pi+Arc\,cotg.\,p$

Schlüßlich wird man bemerken, daß die Resultate I. 3, II. 3, III. 4 und IV. 4 mit denen der Nr. 28 übereinstimmen.

Anmerkung. Bei einem anderen Schriftsteller (Rabe's Differential- und Integral-Rechnung I. Th. pag. 109) findet man, wenn die hiesigen Zeichen gebraucht werden,

$$(\natural)\ \frac{1}{Tg}(p+q\cdot i)=\tfrac{1}{2}\frac{1}{Tg}\frac{2p}{1-p^2-q^2}+\tfrac{1}{2}i\cdot L\sqrt{\frac{p^2+(1+q)^2}{p^2+(1-q)^2}}.$$

Der zweite (mit i afficirte) Theil dieses Ausdrucks stimmt mit dem analogen Theil rechts in III. 1 vollkommen überein. Nimmt man nun wie oben (Nr. 31 III. Glchg. 7)

$$Tg\,x=\frac{p^2+q^2-1+\sqrt{(p^2+q^2-1)^2+4p^2}}{2p}$$

zugleich aber auch

$$Tg\,x'=\frac{p^2+q^2-1-\sqrt{(p^2+q^2-1)^2+4p^2}}{2p}$$

so findet man für $Tg\,2x'$ dasselbe $\frac{2p}{1-p^2-q^2}$ wie für $Tg2x$; daher enthält

$$\tfrac{1}{2}\frac{1}{Tg}\frac{2p}{1-p^2-q^2}\ \text{oder}\ \tfrac{1}{2}\mu\pi+\tfrac{1}{2}\,Arc\,tg.\frac{2p}{1-p^2-q^2}$$

sowohl die Bogen x, welche die gesuchten sind, als auch die anderen Bogen x', welche nicht genommen werden dürfen; und es müssen also nun noch die rechten Werthe von x, von den unrichtigen abgesondert werden.

Eine genaue Vergleichung mit dem Ausdrucke III. 1 läßt nun erkennen, daß man statt der III. 1 der Nr. 31 auch setzen kann

$$(\odot)\cdots\frac{1}{Tg}(p+q\cdot i)=\tfrac{1}{2}\mu\pi+\tfrac{1}{2}\,Arc\,tg.\frac{2p}{1-p^2-q^2}$$
$$+\tfrac{1}{4}i\cdot L\frac{p^2+(1+q)^2}{p^2+(1-q)^2}$$

wenn man μ bloß Null oder gerade nimmt, so oft $1-p^2-q^2$ positiv ist, während dagegen μ bloß unge-

rade genommen werden darf, so oft $1-p^2-q^2$ negativ wird.

Wollte man also z. B., wenn $1-p^2-q^2$ mit p zugleich negativ ist,

$$\frac{1}{Tg}(p+q\cdot i)=\tfrac{1}{2}Arc\,tg.\frac{2p}{1-p^2-q^2}+\tfrac{1}{2}l\cdot L\sqrt{\frac{p^2+(1+q)^2}{p^2+(1-q)^2}}$$

und für *Arctg.* den Bogen im ersten Quadranten nehmen, so würde man ein unrichtiges Resultat haben.

Daher muß die hier citirte Formel des Rabe, dieser oder irgend einer analogen Beschränkung unterworfen werden, wenn sie in allen Fällen richtige Resultate liefern soll.

Der Geist

der

Differential- und Integral-Rechnung.

Erstes Kapitel.

Die gesammte Ableitungs-Rechnung.

Einleitung.

Wenn dx einen unendlich-kleinen Zuwachs der Abscisse OP = x (Fig. 1) und dy den zugehörigen unendlich-kleinen Zuwachs der Ordinate PM = y einer beliebigen Kurve AMS vorstellt, — wenn man ferner die Tangente MT an dieser Stelle der Kurve als das verlängerte (geradlinige) Element MN der Kurve sich denkt, welches zwischen denjenigen beiden Punkten M und N liegt, deren Koordinaten-Werthe bezüglich x und y, so wie x+dx und y+dy sind, — so bilden dx und dy die Katheten eines rechtwinklichen Dreiecks MRN, dessen Hypotenuse durch die gedachte Tangente MT gebildet wird; daher ist der Quotient $\frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Winkels MTX = φ, den die Kurven-Tangente MT mit der Abscissen-Axe OX macht. — Leibnitz kam hiernach auf den Gedanken, um an jede Kurve Tangenten ziehen zu können, für jede durch y vorgestellte Funktion von x, den zu dem Zuwachs dx gehörigen Zuwachs dy (in x und dx ausgedrückt) zu finden, d. h. Mittel anzugeben, wie dieser Zweck für jede solche Funktion y von x erreicht werden könne, jedoch unter der Vor-

aussetzung, daß dx **unendlich-klein**, d. h. immer kleiner noch gedacht wird, als jede noch so klein gedachte aber bestimmte Größe (Zahl).

Diese unendlich-kleinen Zuwachse wurden, weil sie **Differenzen** zwischen den alten und den neuen Koordinaten, aber unendlich-klein sind, **Differentialien** genannt; und sowohl diesem Ursprunge nach, als auch der ganzen Geschichte der Differential-Rechnung entsprechend, kann man die Leibnitzische Differential-Rechnung definiren als: „die Lehre von „der Bestimmung der Abhängigkeit der unendlich-kleinen Zu„wachse zweier oder mehrerer von einander abhängiger Ver„änderlichen."

Diese Rechnung setzt aber ihrem Begriffe nach voraus, daß man es in ihr mit lauter **reellen** Werthen zu thun habe, weil nur bei solchen die Begriffe des **Größern** und **Kleinern** statt finden. Nichts desto weniger zeigt der Verlauf der Rechnungen häufig, daß man Ausdrücke wie z. B.

$$y=(x-a)^{\frac{1}{2n}}, \quad y=e^{x.\sqrt{-1}}, \quad y=log\sqrt{1-x^2},$$
$$y=log(\sqrt{1-x^2}+x\cdot\sqrt{-1}), \quad \text{etc. etc. etc.}$$

differentiirt, d. h. Ausdrücke differentiirt, die entweder für **alle**, oder doch für die **meisten** reellen Werthe von x, nur imaginäre Werthe annehmen, und also von zusammengehörigen **reellen** Zuwachsen oft nicht mehr die Rede seyn kann. — **Cauchy**, der das besondere Verdienst hat, die großen Schwächen der mathematischen Analysis (hinsichtlich ihrer Grundlagen) am entschiedensten hervorgehoben zu haben, und der zwar mit großem Scharfsinn, aber nicht immer mit dem glücklichsten Erfolge, es versucht hat, diesen Uebeln abzuhelfen (sowohl in seinem Cours d'analyse à Paris. 1821, als auch in seinem Résumé des leçons données à l'Ecole

Royale Politechnique sur le calcul infinitésimal à Paris 1823) hat zu dem Ende den Ausdrücken dx, dy die Form $\alpha+\beta\cdot\sqrt{-1}$ untergelegt, wo α und β reell aber unendlich-klein sind, und außerdem noch Ausdrücke betrachtet, welche er „imaginäre Funktionen"*) (pag. 20 des Résumé) nennt, und welche Form $u_x+v_x\cdot\sqrt{-1}$ haben, wo u_x und v_x in dem Umfange gedacht werden, als sie für reelle Werthe von x noch reelle Werthe annehmen. Allein mit dem Allen scheint für die Möglichkeit eines allgemeinen Differenzirens nicht das geringste gewonnen zu seyn; denn, wenn es auch nicht schwer hält nachzuweisen, daß auch bei solchen imaginären Unendlich-Kleinen, die höhern Potenzen und die höhern Ordnungen gegen die niedrigern Potenzen und die niedrigern Ordnungen außer Acht gelassen werden können (worauf die Leibnitzische Differential-Rechnung basirt ist), so handelt es sich doch in Wahrheit nicht um Ausdrücke von der Form $u_x+v_x\cdot\sqrt{-1}$, sondern um Ausdrücke wie z. B. $y=bx^2+(x-a)^{\frac{1}{2n}}$, welche differenzirt werden müssen, und differenzirt werden, während der veränderliche x noch ganz unbekannt ist, und oft selbst erst mittelst des Resultats der Differentiation gefunden wird, so daß man nun nicht weiß,

*) Nach den in der „Ersten Abhandlung" hingestellten Ansichten, giebt es durchaus nicht reelle und auch nicht imaginäre allgemeine Funktionen, weil das Wesen einer allgemeinen Funktion gerade darin besteht, daß solche eine bloße Form ist, in welcher die Buchstaben (die Veränderlichen) ganz Inhaltlos, bloße Träger der Operationen sind. Erst dann, wenn den Buchstaben bestimmte Ziffernwerthe beigelegt werden, kann die Funktion in einen Ziffernwerth übergehen, und dieser erst ist entweder reel oder imaginär. So lange man aber allgemein rechnet, kann und braucht man sich um das Reel-Seyn oder Imaginär-Seyn durchaus nicht zu bekümmern.

in dem Augenblick wo man differenzirt, ob $x>a$ oder $x<a$, ob also y reel oder imaginär ist.

Und somit kommen wir immer wieder zur Hauptsache zurück, daß nämlich die allseitige Brauchbarkeit der mathematischen Analysis, also ihr Wesen, in ihrer Allgemeinheit besteht, d. h. darin, daß man mit Unbekannten eben so sicher rechnen könne, wie mit Bekannten; — und daß wir dieses wichtigsten Elementes der Analysis und einer großen Anzahl von Anwendungen derselben verlustig gehen würden, wenn es nöthig wäre, ehe man mit Unbekannten rechnet jedesmal vorher erst zu untersuchen, ob die Ausdrücke, in denen sie vorkommen, reell oder gar positiv sind, da diese Untersuchung oft gar nicht möglich ist, so lange noch in denselben Ausdrücken die Unbekannten vorkommen, welche eben selbst erst durch die Rechnung, deren Möglichkeit noch in Frage gestellt ist, gefunden werden sollen.

Es bleibt diesem nach nichts anders übrig, als die hier in Rede stehenden Rechnungen viel allgemeiner aufzufassen und die Leibnitzische Differential-Rechnung, so wie alle auf besondere Werthe der Buchstaben sich stützende Methoden*) nur als besondere An-

*) Wir übergehen die „Methode der Grenzen" absichtlich, da sich gegen sie alles das sagen läßt, was so eben gegen die Leibnitzische Differential-Rechnung gesagt werden mußte, in so fern sie nur anschaulicher macht, wie $\frac{dy}{dx}$ an der Grenze des Zuwachses dx, d. h. da wo derselbe in Null übergeht, doch noch einen bestimmten Werth hat; — von dieser Seite also größere Anschaulichkeit und daher auch größere Ueberzeugung gewährt, dabei aber doch immer diese Grenzwerthe als reell voraussetzt, so daß nach der „Methode der Grenzen" ein allgemeines Differenziren und Integriren, mit Ausdrücken die noch alle Werthe annehmen können, eben so wenig statt finden kann, als im Sinne der „Differential-Rechnung".

wendungen allgemeinerer Rechnungen anzusehen, welche letzteren bereits von Lagrange unter dem Namen des „Calcul des fonctions" zuerst gegeben worden sind, und die wir hier von unserem Standpunkte aus betrachten und unter dem Titel der „Ableitungs-Rechnung" zunächst in's Auge fassen wollen.

§ 1.

Die „Ableitungs-Rechnung" beschäftigt sich aber zunächst mit folgender Aufgabe:

„Den Ausdruck f_{x+h} (der aus einer beliebig gegebenen „Funktion f_x, in welcher x noch ganz allgemein als ein bloßer „Träger der Operationen gedacht wird, dadurch hervorgeht, „daß überall wo x steht, x+h statt x gesetzt wird) in eine „nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe zu verwan-„deln und zunächst den Koefficienten des ersten, mit h afficirten „Gliedes, welcher durch df_x bezeichnet und Differential-Koefficient genannt wird, zu finden." —

Dieses letztere Geschäft kann man das „Differenziiren der Funktion f nach x" nennen (weil aus dem Differential-Koefficienten, wenn er einmal gefunden ist, in den Anwendungen, das Leibnitzische Differential augenblicklich hervorgeht).

§. 2.

Man hat sich viel bemüht die Existenz einer solchen Reihe für f_{x+h} nachzuweisen, und es ist allerdings nothwendig, sobald die vorliegende Aufgabe gegeben wird, vor oder doch während ihrer Lösung nachzuweisen, daß sie in allen Fällen einer solchen Lösung fähig ist. Nach der Ansicht, die wir in der „Ersten Abhandlung" über den hier weiter zu verfolgenden Gegenstand (Berlin 1842) entwickelt haben, hat

die mathematische Analysis zunächst nur das Verhalten der sieben Operationen zu einander zu betrachten. Daher kennen wir zur Zeit nach keine anderen Funktionen als solche, die durch (angezeigtes) Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren, Potenziren, Radiciren und Logarithmiren entstanden sind. — Diese Funktionen sind nun entweder die einfachsten $A \cdot x^m$, a^x, $log\, x$, wozu man auch noch die allgemeinen, von uns in der „ersten Abhandlung" durch S_x und K_x bezeichneten Sinus- und Kosinus-Reihen zählen kann, während auch a^x nichts als eine unendliche Reihe vorstellt (I. Abhdlg. §§. 49, 61); — oder sie sind aus zweien andern Funktionen, oder aus einer Konstante und einer Funktion von x, durch eine der 7 Operationen zusammengesetzt. Man braucht daher nur zu zeigen,

1) daß $A \cdot (x+h)^m$, a^{x+h}, $log\,(x+h)$, und etwa noch $Sin\,(x+h)$ und $Cos\,(x+h)$ *), so lange x ganz allgemein, d. h. ein bloßer Träger der Operationen bleibt, sich allemal in solche, nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihen verwandeln lassen; und

2) daß eine Verbindung aus einer solchen Reihe mit einem (nach x) konstanten Ausdruck, oder zweier solcher Reihen mit einander, mittelst irgend einer der 7 Operationen, allemal und unbedingt und ohne Ausnahme wieder zu einer solchen Reihe führt, die wieder nach ganzen Potenzen von h fortläuft.

In Bezug auf den erstern Theil der Untersuchung hat man sogleich (I. Abhdlg. §. 68):

*) Unter $Sin\, x$ und $Cos\, x$ verstehen wir hier immer die allgemeinen Sinus- und Kosinus-Reihen, von welchen die Sinus und Kosinus, die in der ebenen und sphärischen Trigonometrie vorkommen, nur besondere Werthe sind. —

$$A\cdot(x+h)^m = A\cdot x^m + m_1 A\cdot x^{m-1} h + m_2 x^{m-2} \cdot h^2 + \cdots,$$

wo unter m_r der r^{te} Binominal-Koefficient der m^{ten} Potenz, also der Quotient $\frac{m^{r|-1}}{r!}$ *) d. h.

$$\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(r-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}$$

verstanden wird, welche ganze positive Zahl auch immer durch r vorgestellt ist. Um aber, wenn m nicht ganz ist, über die zusammengehörigen Werthe der verschiedenen Potenzen von x nicht im ungewissen zu seyn, schreibt man lieber

$$\text{I. } A(x+h)^m = Ax^m\cdot(1+m_1\cdot\frac{h}{x}+m_2\cdot\frac{h}{x^2}+m_3\frac{h^3}{x^3}+\cdots)$$

wo die Reihe rechts, je nachdem man man für x^m den einen oder den andern ihrer Werthe setzt, allemal genau den zugehörigen Werth von $A(x+h)^m$ liefert **).

---

*) Das Zeichen $a^{n|b}$ bedeutet allemal ein Produkt von n Faktoren, von denen der erste a ist, jeder folgende aber entsteht, wenn man zu dem nächstvorhergehenden noch b addirt. Außerdem wird $a^{1|b}=a$ und $a^{0|b}=1$ gedacht. — Das Produkt $1^{n|1}$ oder 1.2.3....n wird auch durch n! bezeichnet, während 1! = 1 und auch o! = 1 gedacht wird.

**) Es ist nämlich $(x+h)^m = \left[x.(1+\frac{h}{x})\right]^m = x^m.(1+\frac{h}{x})^m$,

also auch $(x+h)^m = x^m.(1+m.\frac{h}{x}+m_2.\frac{h^2}{x^2}+\ldots)$, wo rechts eben so viele Werthe stehen und dieselben, welche links durch $(x+h)^m$ vorgestellt sind (nach der I. Abhandlung). Setzt man aber h = o, so erhält man rechts x^m und links x^m, und da diese Gleichung nur dann richtig seyn kann, wenn x^m rechts und links jedesmal einen und denselben ihrer Werthe vorstellt, so sind

Ferner hat man, weil $e^{x+h}=e^x \cdot e^h$ ist (nach I. Abhandlung §. 49)

$$\text{II.}\quad e^{x+h}=e^x\cdot\left[1+h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\cdots\right]$$

und

$$\text{III.}\quad a^{x+h}=a^x\cdot\left[1+\frac{\log a}{1}\cdot h+\frac{(\log a)^2}{2!}\cdot h^2+\cdots\right],$$

wo statt *log* a derjenige seiner unendlich-vielen Werthe gesetzt werden muß, der die zusammengehörigen Werthe von a^x und a^{x+h}, in so ferne solche bezüglich durch $e^{x.\log a}$ und $e^{(x+h).\log a}$ ausgedrückt sind, bedingt *). (Siehe I. Abhandlung §. 61).

Endlich hat man (nach I. Abhandlung §. 67 und) weil $\log(x+h)=\log x+\log(1+\frac{h}{x})$ ist,

$$\text{IV.}\quad \log(x+h)=\log x+\frac{1}{x}\cdot h-\frac{1}{2x^2}\cdot h^2+\cdots$$

Zuletzt ist (nach I. Abhandlung §. 52)

$$\text{V.}\quad Sin(x+h)=Sin\,x+Cos\,x\cdot h-Sin\,x\cdot\frac{h^2}{2!}-Cos\,x\cdot\frac{h^3}{3!}+\cdots$$

$$\text{VI.}\quad Cos(x+h)=Cos\,x-Sin\,x\cdot h-Cos\,x\cdot\frac{h^2}{2!}+Sin\,x\cdot\frac{h^3}{3!}+\cdots$$

und diese 6 Reihen finden unbedingt und ohn Ausnahme statt, so lange nur x (und auch h) ganz allgemein d. h. völlig Inhaltlos, d. h. bloße Träger der Operationen sind. Und auch diese 6 Gleichungen sprechen, wie jede

---

für jedes andere h, x^m rechts und $(x+h)^m$ links in der letztern Gleichung allemal zusammengehörige Werthe.

*) Es ist nur dann $e^{(x+h)\log a}=e^{x.\log a}.e^{h.\log a}$, wenn in dieser Gleichung das Zeichen *log* a, so oft es vorkommt, jedesmal einen und denselben seiner Werthe vorstellt.

Gleichung nichts anders aus als das Verhalten der 7 Operationen zu einander, so daß die Reihen zur Rechten statt der Ausdrücke zur Linken des Gleichheitszeichens gesetzt werden können, und zwar überall wo „gerechnet" wird, ohne daß man befürchten müßte, dadurch den Gesetzen der Operationen zu widersprechen, d. h. auf irgend einen Widerspruch zu stoßen.

Was aber den andern Theil der Untersuchung betrifft, so ist klar, daß zwei solche Reihen wie

$$(R) \cdots \; A_0 + A_1 \cdot h + A_2 \cdot h^2 + A_3 \cdot h^3 + \cdots$$

$$(S) \cdots \; B_0 + B_1 \cdot h + B_2 \cdot h^2 + B_3 \cdot h^3 + \cdots$$

zu einander addirt, von einander subtrahirt, mit einander multiplicirt und durch einander dividirt, immer wieder eine solche Reihe geben, so lange das allererste Glied im Divisor nicht Null wird, was eben im Allgemeinen nie der Fall ist, weil im Allgemeinen die Buchstaben ganz Inhaltlos, die Ausdrücke selbst bloße Formen sind, die außer dem in dieser Form ausgesprochenen, keinen anderweitigen Inhalt haben.

Daß die Wurzel $\sqrt[m]{R}$ allemal wieder eine solche Reihe giebt, ist in der I. Abhandlung §. 46 außer Zweifel gestellt, so lange das allererste Glied A_0 nicht der Null gleich ist. Endlich erhält man für

$$log\, R = log\, A_0 + log\left(1 + \frac{A_1}{A_0} h + \frac{A_2}{A_0} h^2 + \cdots\right)$$

unstreitig wieder eine solche Reihe (nach I. Abhandl. §. 67), so lange nur das allererste Glied A_0 nicht der Null gleich ist. Zuletzt aber geben

$$a^R = e^{R.log\, a} \quad \text{und} \quad R^S = e^{S.log\, R}$$

(nach I. Abhdlg. §§. 49 u. 61) allemal wieder solche Reihen, so lange nur das allererste Glied A_0 nicht Null ist.

Nun ist aber hier, wo x ganz allgemein gedacht ist, das allererste Glied der vorkommenden, nach ganzen Po-

tenzen von h fortlaufenden Reihen deshalb nie der Null gleich, weil solches immer eine Funktion von x, d. h. ein durch angezeigte Operationen gebildeter Ausdruck ist, der nur für besondere Werthe von x der Null gleich werden kann; während in diesen Aufgaben und Untersuchungen der Buchstabe x vorläufig ganz Inhaltlos, d. h. als ein bloßer Träger der Operations-Zeichen gedacht werden soll und muß; also von besonderen Werthen desselben nicht die Rede ist. —

Also läßt sich die Form f_{x+h}, so lange x ganz allgemein ist, allemal und unbedingt in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe umgeformt denken, wie auch die Funktion f_x beschaffen seyn mag, ein endlicher Ausdruck oder eine unendliche Reihe*), entwickelt oder verwickelt gegeben.

§. 3.

Wo die Gleichung

$$f_{x+h} = A_0 + A_1 \cdot h + A_2 \cdot h^2 + A_3 h^3 + \cdots$$

eine identische seyn soll und ist, die für jeden von x unabhängigen Werth von h, also auch für $h = o$ wahr bleiben muß, so muß $A_0 = f_x$ seyn. Das allererste Glied der Reihe für f_{x+h} ist also allemal f_x selbst.

Der Koefficient A_1 des ersten Gliedes $A_1 h$, wurde im §. 1 durch df_x bezeichnet; ihn für jedes f_x zu finden ist nun die nächste Aufgabe.

---

*) Man übersehe nie, daß die Funktionen *Sin* x, *Cos* x, e^x, a^x auch schon unendliche Reihen sind, die nur durch diese einfacheren und wie endliche Ausdrücke erscheinenden Zeichen bezeichnet worden sind (vgl. I. Abhdlg. §§. 49, 50, 61).

I. Nach §. 2 zeigt sich aber für die 6 einfachsten Funktionen ohne Weiteres:

1) wenn $f_x = x^m$, dann $df_x = mx^m \cdot \frac{1}{x}$, wo x^m jedesmal einen und denselben seiner Werthe vorstellt;

2) wenn $f_x = e^x$, dann $df_x = e^x$;

3) wenn $f_x = a^x = e^{x \cdot log\, a}$, dann $df_x = a^x \cdot log\, a = e^{x \cdot log\, a} \cdot log\, a$, wo $log\, a$ überall einen und denselben seiner Werthe vorstellt;

4) wenn $f_x = log\, x$, dann $df_x = \frac{1}{x}$;

5) wenn $f_x = Sin\, x$, dann $df_x = Cos\, x$;

und

6) wenn $f_x = Cos\, x$, dann $df_x = -Sin\, x$.

Danach sind also alle einfachsten Funktionen von x differenziirt (nach x).

II. Hierauf betrachtet man alle Funktionen, welche aus einer Funktion φ_x von x und einer Konstante A, oder m, oder a (nach x)*) zusammengesetzt sind, nämlich

$$A \pm \varphi_x; \quad A \cdot \varphi_x \text{ oder } \frac{\varphi_x}{A}; \quad \varphi^m; \quad a^\varphi \text{ und } log\, \varphi;$$

setzt voraus, daß φ_{x+h} sich in eine solche Reihe $\varphi_x + d\varphi_x \cdot h + \cdots$ verwandeln läßt, und zeigt, daß alle eben aufgeführten Funktionen, wenn in ihnen x+h statt x gesetzt wird, sich dann ebenfalls in eine solche Reihe verwandeln **).

---

*) Konstant nach x heißt jeder Ausdruck, der den Veränderlichen x weder explicit noch implicit enthält, wie er auch übrigens zusammengesetzt seyn mag.

**) Es mag hier die Ausführung für eine dieser Funktionen stehen, z. B. für $f = log\, \varphi$. — So wie x+h statt x gesetzt wird, so

Bei dieser Gelegenheit besteht man sich die ersten Koefficienten dieser letzteren Reihen, weil solche die Differential-Koefficienten sind, und man erhält dadurch für den künftigen Gebrauch folgende Resultate:

7) wenn $f_x = A \pm \varphi_x$, so ist $df_x = \pm d\varphi_x$;

8) wenn $f_x = A \cdot \varphi_x$, so ist $df_x = A \cdot d\varphi_x$;

9) wenn $f_x = (\varphi_x)^m$, so ist $df_x = m\varphi^m \cdot \frac{d\varphi_x}{\varphi}$;

wo φ^m links und rechts eine und dieselbe ihrer Formen (Werthe) vorstellt;

10) wenn $f_x = a^{(\varphi_x)} = e^{\varphi . log\, a}$, so ist $df_x = a^\varphi \cdot log\, a \cdot d\varphi_x$;

wo $log\, a$ den Werth des Logarithmen vorstellt, der in $e^{\varphi . log\, a}$ genommen ist, um gerade diejenige der Formen (Werthe) von a^φ zu geben, in welcher $x+h$ statt x gesetzt worden ist;

11) wenn $f_x = log\, \varphi_x$, so ist $df_x = \frac{d\varphi_x}{\varphi}$.

---

geht φ d. h. φ_x in φ_{x+h} d. h. in $\varphi_x + d\varphi_x . h + \ldots$ d. h. in $\varphi + k$ über, wenn durch k die Reihe $d\varphi_x . h + \ldots$ bezeichnet wird, deren Glieder alle mit h afficirt sind, so daß, wenn man diese Reihe statt k in k^2, k^3 etc. etc. substituirt, Reihen nach h fortlaufend entstehen, in welchen kein einziges Glied vorkommt, welches die erste Potenz von h enthielte, deren Koefficienten wir allein suchen. Nun hat man aber $log(\varphi + k) = log\, \varphi + log(1 + \frac{k}{\varphi}) = log\, \varphi + \frac{k}{\varphi} - \frac{1}{2}\frac{k^2}{\varphi^2} + \ldots$, von welcher Reihe nur das einzige Glied $\frac{k}{\varphi}$ die erste Potenz von h enthält. So findet sich, wenn mann statt k seinen Werth $d\varphi_x . h + \ldots$ setzt, als Koefficient von h^1 in der Reihe für $log(\varphi + k)$ sogleich $\frac{d\varphi_x}{\varphi}$.

III. Endlich betrachtet man alle Funktionen von x, welche aus zwei anderen Funktionen φ_x und ψ_x zusammengesetzt sind, nämlich

$$\varphi \pm \psi; \quad \varphi \cdot \psi; \quad \frac{\varphi}{\psi} \text{ und } \varphi^{\psi},$$

und setzt wieder voraus, daß φ_{x+h} und ψ_{x+h} sich in solche Reihen verwandeln lassen, nämlich

$$\varphi_{x+h} \quad \text{in} \quad \varphi_x + d\varphi_x \cdot h + \cdots \text{ d. h. in } \varphi + k$$

und

$$\psi_{x+h} \quad \text{in} \quad \psi_x + d\psi_x \cdot h + \cdots \text{ d. h. in } \psi + l,$$

wo k und l bezüglich die Reihen $d\varphi_x \cdot h + \cdots$ und $d\psi_x \cdot h + \cdots$ vorstellen. Dann verwandelt man unter dieser Voraussetzung auch die hier aufgezählten, aus φ und ψ zusammengesetzten Funktionen in solche Reihen, indem man die für φ_{x+h} und ψ_{x+h} vorhandenen Reihen addirt, subtrahirt, multiplicirt, dividirt, potenzirt, nach denjenigen Regeln, die in der „I. Abhandlung" für diese Operationen mit Reihen, gegeben worden sind. Bei dieser Gelegenheit hält man überall die ersten Koefficienten der entstehenden Reihen fest, weil sie die von uns gesuchten Differential-Koefficienten sind; und daher findet man zugleich

12) wenn $f_x = \varphi_x \pm \psi_x$, so ist $df_x = d\varphi_x \pm d\psi_x$;

13) wenn $f_x = \varphi_x \cdot \psi_x$, so ist $df_x = \psi_x \cdot d\varphi_x + \varphi_x \cdot d\psi_x$;

14) wenn $f_x = \frac{\varphi_x}{\psi_x}$, so ist $df_x = \frac{d\varphi_x}{\psi} - \frac{\varphi \cdot d\psi_x}{\psi^2}$;

15) wenn $f_x = \varphi^{\psi}$, so ist $df_x = \varphi^{\psi} \cdot \left(\frac{\psi}{\varphi} \cdot d\varphi_x + d\psi_x \cdot \log \varphi\right)$

wo φ^{ψ} links und rechts einen und denselben seiner Werthe $e^{\psi \cdot \log \varphi}$ vorstellt, während $\log \varphi$ ebenfalls immer einen und denselben Werth haben muß, so zwar, daß $\log \varphi$ und φ^{ψ}

d. h. $e^{\psi . log\, \varphi}$ zusammengehörige Werthe bilden.

Nach diesen Formeln 1 — 15 kann also jede entwickelt gegebene Funktion von x differenziirt werden (nach x).

Anmerkung. Für besondere Ziffernwerthe von x können einige der Koefficienten (oder alle) einer solchen für f_{x+h} erhaltenen Reihe, Ausdrücke wie *log* o oder $\frac{1}{o}$, d. h. Ausdrücke in sich aufnehmen, die im Kalkul nicht mehr zuläßig sind. In solchen besonderen Fällen der Anwendung zeigen diese Erscheinungen natürlich an, daß die Reihe zwar immer als allgemeine Form noch existirt, daß sie aber für diesen besonderen Werth von x, nicht in Anwendung kommen kann. In dem Problem (§. 1), womit sich die Ableitungsrechnung beschäftigt, wird aber gerade die Entwickelung von f_{x+h} verlangt, so lange x noch ganz allgemein d. h. völlig Inhaltlos ist, also noch jeden Werth annehmen kann, ohne irgend einen bestimmten Werth schon vorzustellen.

Dabei ist nicht zu übersehen, daß die vorstehenden Beweise nur für solche Ausdrücke f_x gelten, welche wir Funktionen von x genannt haben, nämlich für solche Ausdrücke, welche mittelst der 7 Operationen beliebig zusammengesetzt übrigens endliche oder unendliche Reihen sind.

Erscheinen später noch andere Ausdrücke (unter dem Namen der diskontinuirlichen Funktionen) in denen die hier vorausgesetzte Allgemeinheit nicht statt findet, so ist es dann erst die Sache einer gründlichen Behandlung, das was für diese neuen Erscheinungen gilt, gehörig vollständig zu untersuchen. Für alle uns bis jetzt erschienenen Funk-

tionen von x gelten also diese (hier vorstehenden) Beweise vollständig und ohne Ausnahme.

§. 4.

Man kann die Betrachtungen II. und III. des vorstehenden §. 3 verallgemeinern.

Denkt man sich nämlich unter f_φ einen durch f bezeichneten Ausdruck, welcher φ und beliebig viele andere Buchstaben, aber kein x enthält, denkt man sich dann unter φ_x eine ganz beliebige Funktion von x, und durch $f_{(x)}$ das bezeichnet, was aus f_φ wird, wenn man diese Funktion φ_x wirklich statt φ substituirt, so ist allemal

$$\text{I.}\quad df_{(x)} = df_\varphi \cdot d\varphi_x\,;$$

und in dieser Formel stecken die in §. 3, Nr. 7—11 aufgestellten als besondere Fälle *).

Denkt man sich aber unter $f_{\varphi,\psi}$ einen Ausdruck der die Buchstaben φ und ψ enthält, und der noch beliebig viele andere Buchstaben in sich aufgenommen haben kann, aber nur x selbst (explicit) nicht enthalten soll, und denkt man sich unter φ, ψ die Funktionen φ_x, ψ_x von x, — und das, was aus $f_{\varphi,\psi}$ wird, wenn diese Funktionen von x wirklich statt der Buchstaben φ, ψ gesetzt werden, durch $f_{(x)}$ bezeichnet, — so hat man allemal

---

*) Setzt man nämlich x+h statt x, so geht φ über in $\varphi+k$, wo $k = d\varphi_x . h + \ldots$; also geht dann f_φ über in $f_{\varphi+k}$, d. h. in $f_\varphi + df_\varphi . k + \ldots$; und setzt man hier statt k seinen Werth, um eine nach h fortlaufende Reihe zu erhalten, so erhält man

$$f_{(x+h)} = f_\varphi + df_\varphi . d\varphi_x . h + \ldots,$$

wodurch die obige Behauptung erwiesen ist.

II. $df_{(x)} = df_{\varphi} \cdot d\varphi_x + df_{\psi} \cdot d\psi_x$,

wo in df_{φ} der Buchstabe ψ als (nach φ) konstant, und in df_{ψ} der Buchstabe φ als (nach ψ) konstant angesehen worden ist.

In dieser Formel II. stecken übrigens die Nr. 13 — 15 des §. 3 als besondere Fälle*).

Denkt man sich ferner $f_{\varphi,\psi,\pi}$ auf ganz analoge Weise ohne x, aber φ, ψ, π wieder als Funktionen von x, so erhält man noch

III. $df_{(x)} = df_{\varphi} \cdot d\varphi_x + df_{\psi} \cdot d\psi_x + df_{\pi} \cdot d\pi_x$.

Diese Formeln lassen sich aber beliebig erweitern und verallgemeinern.

Kommt in f der Veränderliche x selbst noch vor (explicit), so kann man sich solchen als eine Funktion von x denken, so daß $dx_x = 1$ wird. Dann liefern dieselben Formeln II. III. etc. etc. noch

---

*) Setzt man nämlich $x+h$ statt x, so erhält man aus φ und ψ jetzt $\varphi+k$ u. $\psi+l$, wo $k = d\varphi_x . h + \ldots$ u. $l = d\psi_x . h + \ldots$ ist. Dadurch wird $f_{(x+h)} = f_{\varphi+k,\, \psi+l}$. Denkt man sich nun letzteren Ausdruck als eine Funktion von $\varphi+k$, was er auch ist, so geht er über in $f_{\varphi} + df_{\varphi} . k + \ldots$, wo aber in f_{φ} und df_{φ} etc. etc. die Summe $\psi+l$ statt ψ steht, so daß f_{φ} oder vielmehr $f_{\varphi,\psi+l}$ selbst wieder $= f_{\varphi,\psi} + df_{\psi} . l + \ldots$ wird, während aber auch der Koefficient df_{φ} als Funktion von $\psi+l$ wieder $= df_{\varphi} + d(df_{\varphi})_{\psi} . l + \ldots$ ist. Substituirt man dies alles in obigen Ausdruck für $f_{(x+h)}$ und dann statt k und l wieder ihre Werthe, ordnet man alles nach h, so erhält man

$$f_{(x+h)} = f_{\varphi,\psi} + (df_{\varphi}\, d\varphi_x + df_{\psi} . d\psi_x) . h + \ldots$$

wodurch die obige II. außer Zweifel gesetzt ist.

1) $df_{(x)} = df_x + df_\varphi \cdot d\varphi_x$, wenn f unmittelbar außer x noch φ als Funktion von x enthält;

2) $df_{(x)} = df_x + df_\varphi \cdot d\varphi_x + df_\psi \cdot d\psi_x$, wenn f unmittelbar außer x noch φ und ψ als Funktionen von x enthält;

u. s. w. f.

wenn nur $f_{(x)}$ allemal die Funktion von x vorstellt, die aus f wird, wenn φ_x, ψ_x etc. etc. statt φ, ψ etc. gesetzt werden.

§. 5.

Mit dem in den §§. 3 und 4 hingestellten Apparat kann man nun die Differential-Koefficienten finden von jeder gegebenen Funktion f_x, es mag solche entwickelt gegeben seyn oder verwickelt durch eine oder mehrere Gleichungen zwischen x und den Buchstaben y, z etc. etc., welche vorläufig diese Funktionen von x vorstellen, die man nicht in entwickelter Form herstellen will oder nicht herstellen kann.

In Bezug auf die verwickelt gegebenen Funktionen bedarf es dazu bloß des Satzes, daß, so oft eine Funktion $f_{(x)}$ (d. h. f_{x,y_x}, oder f_{x,y_x,z_x} etc. etc.) identisch (d. h. für jeden Werth von x) der Null oder einer Konstante c gleich ist, — dann auch $f_{(x+h)}$ der Null oder der Konstante c gleich seyn muß für jeden Werth von h, daß also auch jeder einzelne der Koefficienten der für $f_{(x+h)}$ zu findenden Reihe, also auch der Differential-Koefficient $df_{(x)}$ d. h. $df_x + df_y \cdot dy_x + \cdots$, nothwendig der Null gleich seyn muß, aus welchen Gleichungen dann die unbekannten Differential-Funktionen dy_x etc. etc. gefunden werden.

§. 6.

Nun steht nichts mehr im Wege den Taylor'schen Lehrsatz hinzustellen, durch welchen das im §. 1 ausgesprochene Problem erst gänzlich gelößt ist. Man findet nämlich

$$\text{I. } f_{x+h}=f_x+df_x\cdot h+d^2f_x\cdot\frac{h^2}{2!}+d^3f_x\cdot\frac{h^3}{3!}+d^4f_x\cdot\frac{h^4}{4!}+\cdots,$$

wo d^2f_x den Differential-Koefficienten der Funktion df_x, — wo d^3f_x den Differential-Koefficienten der Funktion d^2f_x bedeutet, und wo allgemein $d^{n+1}f_x$ den Differential-Koefficienten der Funktion d^nf_x bezeichnet, jeden Differential-Koefficienten nach x genommen*).

Setzt man in I. o statt x, und x statt h, so erhält man den Maclaurin'schen Lehrsatz, nämlich

$$\text{II. } f_x=f_0+df_0\cdot x+d^2f_0\cdot\frac{x^2}{2!}+d^3f_0\cdot\frac{x^3}{3!}+d^4f_0\cdot\frac{h^4}{4!}+\cdots,$$

---

*) Man findet dieses Resultat, indem man

$$(\mathfrak{C}).. f_{x+h}=A_{0,x}+A_{1,x}\cdot h+A_{2,x}\cdot h^2+A_{3,x}\cdot h^3+A_{4,x}h^4+\ldots$$

setzt, und nun die unbestimmten Koefficienten A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 etc. etc., welche im Allgemeinen Funktionen von x seyn werden, dadurch zu bestimmen sucht, daß man zuerst x+k statt x, dann auch k+h statt h setzt, und die beiden Reihen, welche dadurch rechts für $f_{(x+k)+h}$ oder für $f_{x+(k+h)}$ hervorgehen, einander gleich setzt, wo dann die einzelnen Koefficienten einander gleich seyn müssen.

Man kann die unbestimmten Koefficienten A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 etc. etc. aber auch dadurch bestimmen, daß man die Bemerkung macht, wie für jede Funktion φ_x allemal $d(\varphi_{x+h})_h=d(\varphi_{x+h})_x$ ist, und nun die Gleichung ($\mathfrak{C}$) hinter einander nach h differenziirt, zuletzt aber in allen entstehenden Gleichungen Null statt h schreibt.

wo der Kürze wegen $d^n f_0$ geschrieben ist, um das anzudeuten was aus $d^n f_x$ hervorgeht, wenn Null statt x gesetzt wird*).

Setzt man in I. α statt x, und $x-\alpha$ statt h so ergiebt sich der allgemeinere Maclaurin'sche Lehrsatz, nämlich

$$\text{III. } f_x = f_\alpha + df_\alpha \cdot (x-\alpha) + d^2 f_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + d^3 f_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \cdots,$$

wo wieder der Kürze wegen $d^n f_\alpha$ geschrieben ist, um das vorzustellen, was aus (dem bereits hergestellt gedachten) $d^n f_x$ wird, wenn man α statt x schreibt**).

Wendet man ferner den Taylor'schen Lehrsatz zwei oder mehrere Male an, so erhält man noch

IV.

$$\begin{aligned} f_{x+h,\,y+k} = f_{x,\,y} &+ df_x \cdot h + d^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + d^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots \\ &+ df_y \cdot k + 2d^{1,1} f_{x,\,y} \cdot \frac{hk}{2!} + 3d^{2,1} f_{x,\,y} \cdot \frac{h^2 k}{3!} + \cdots \\ &+ d^2 f_y \cdot \frac{k^2}{2!} + 3d^{1,2} f_{x,\,y} \cdot \frac{hk^2}{3!} + \cdots \\ &+ d^3 f_y \cdot \frac{k^3}{3!} + \cdots \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

---

*) Da in der Maclaurin'schen Reihe die Koefficienten entstehen, wenn Null statt x gesetzt wird, so kann es sich treffen, daß solche die im Kalkul unzuläßigen Formen $\frac{1}{0}$ oder $\log 0$ etc. etc. in sich aufnehmen. Dies zeigt, so oft es eintritt, allemal an, daß nun eine solche Reihe, die nach ganzen Potenzen von x fortläuft, für die Funktion f_x nicht existirt. — Die einfachsten Fälle der Art sind $x^{\frac{m}{n}}$, $\log x$, $e^{-\frac{1}{x^2}}$, $e^{-x^2-\frac{1}{x^2}}$ u. dgl. m.

**) Für ein bestimmtes α kann auch diese Reihe nicht immer brauchbar bleiben, wie z. B. wenn $f_x = (x-\alpha)^m$ oder $= \log(x-\alpha)$ u. dgl. m. ist.

wo $d^{1,1}f_{x,y}$ das bedeutet, was man erhält, wenn man von f den Differential-Koefficientrn df_x, und davon wieder den Differential-Koefficienten $d(df_x)_y$ nimmt, — wo ferner $d^{2,1}f_{x,y}$ das bedeutet, was aus f wird, wenn man solche Funktion zweimal hinter einander nach x differenziirt, und dies d^2f_x noch einmal nach y differenziirt wird; — u. s. w. f.

Eben so bekommt man, durch 3 malige Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes (I.)

$$\text{V. } f_{x+h,y+k,z+l} = f_{x,y,z} + df_x \cdot h + d^2f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots$$
$$+ df_y \cdot k + d^2f_y \cdot \frac{k^2}{2!} + \cdots$$
$$+ df_z \cdot l + d^2f_z \cdot \frac{l^2}{2!} + \cdots$$
$$+ 2d^{1,1}f_{x,y} \cdot \frac{hk}{2!} + \cdots$$
$$+ 2d^{1,1}f_{x,z} \cdot \frac{hl}{2!} + \cdots$$
$$+ 2d^{1,1}f_{y,z} \cdot \frac{kl}{2!} + \cdots$$
$$+ \cdots$$

U. s. w. f.

Die Formeln IV, V u. s. w. bilden den Taylor'schen Lehrsatz für Funktionen zweier und mehrerer Veränderlichen*).

§. 7.

Da bei diesen letztern Entwicklungen es einerlei seyn muß, ob man zuerst x+h statt x und dann y+k statt y

*) Man erhält diese letzteren Resultate auch dadurch, daß man $h=\alpha h'$, $k=\alpha k'$, $l=\alpha l'$ setzt, und dann $f_{x+\alpha.h', y+\alpha.k', z+\alpha.l'}$ als Funktion von α mittelst des Maclaurin'schen Satzes nach Potenzen von α entwickelt.

setzt, oder ob man die Ordnung umkehrt; da man aber den Koefficienten von $\frac{h^m \cdot k^n}{m!\,n!}$ (in der Entwicklung von $f_{x+h,\,y+k}$) im erstern Fall $= d^n(d^m f_x)_y$, im anderen Fall dagegen $= d^m(d^n f_y)_x$ erhält, so folgt hieraus zugleich, daß diese beiden Koefficienten einander gleich seyn müssen, und deshalb kann jeder derselben durch $d^{m,n} f_{x,y}$ bezeichnet werden, ohne daß die Ordnung der Ableitungen näher anzugeben wäre. Dies ist in den vorstehenden Formeln IV. und V. geschehen.

Anmerkung. Mit dem Vorstehenden ist das Allgemeinste und Wichtigste der Ableitungs-Rechnung abgeschlossen.— Man kann nun zur Zurückleitungs-Rechnung übergehen (welche der sogenannten Integral-Rechnung entspricht). — Zuvor aber noch einige Bemerkungen über die Taylor'sche Reihe.

Cauchy sagt in der Vorrede zu seinem Résumé etc. 1823: „Mon but principal a été de concilier la rigueur, „dont je m'étais fait une loix dans non Cours d'analyse, avec la simplicité qui résulte de la considération „directe des quantités infiniment petites. Pour cette „raison j'ai cru devoir rejeter les développemens des „fonctions en séries infinies, toutes les fois que les séries obtenues ne sont pas convergentes; et je me suis „vu forcé de renvoyer au calcul intégral la formule de „TAYLOR, cette formule ne pouvant plus être admise comme „générale qu'autant que la série qu'elle renferme, se trouve „réduite à un nombre fini de termes, et complétée par „une intégrale définie. Je n'ignore pas que l'illustre „auteur de la Mécanique analytique*) a pris la formule „dont il s'agit pour base de sa théorie des fonctions „dérivées. Mais, malgré tout le respect que commande

*) Lagrange.

„une si grande autorité, la plupart des géomètres s'ac-
„cordent maintenant à reconnaître l'incertitude des ré-
„sultats auxquelles on peut être conduit par l'emploie
„de séries divergentes, et nous ajouterons, que dans
„plusieurs cas le théorème de TAYLOR semble fournir
„le développement d'une fonction en série convergente,
„quoique la somme de la série diffère essentiellement de
„la fonction proposée [voyez la fin de la 38e Leçon].

In diesen Behauptungen des Cauchy, besonders aber in der letztern liegt offenbar ein großer Irrthum, der nur als eine Folge der in seinem „Cours d'analyse 1821" niedergelegten Ansichten angesehen werden kann, welche Ansichten wir bereits in der „ersten Abhandlung" widerlegen mußten. In der hier von Cauchy angeführten Stelle sollen die Funktionen $e^{-\frac{1}{x^2}}$ und $e^{-x^2}+e^{-\frac{1}{x^2}}$ mittelst des Maclaurin'schen Lehrsatzes in, nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihen verwandelt werden, und Cauchy zeigt nun, wie die Anwendung dieses Lehrsatzes zu lauter Null-Gliedern führt in der ersten Aufgabe, und nur die Entwickelung von e^{-x^2} liefert in der andern Aufgabe, so daß $e^{-\frac{1}{x^2}}$ in der Entwicklung von $e^{-x^2}+e^{-\frac{1}{x^2}}$ ganz verloren geht. — Aber ist denn der Maclaurin'sche Lehrsatz an dieser Verwirrung Schuld, oder sind es nicht unsere veralteten und verworrenen Ansichten vom Kalkul, die Cauchy beibehält? — Man vergleiche unsre Note zu Nr. 23 der Einleitung, wo gezeigt ist, daß Cauchy offenbar so schließt: „es ist $\frac{1}{0}=\infty$, folglich für $x=0$ auch $e^{-\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{0}}=e^{-\infty}$ $=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$;" — daß aber diese Schlußweise ganz un-

richtig ist, geht aus unseren Ansichten lebendig hervor. Nach uns ist nicht $\frac{1}{0} = \infty$, sondern die Null (o) als Nenner, oder als Dignand einer Potenz, oder als Logarithmand zeigt immer an, daß die Form der allgemeinen Rechnung nun eine Ausnahme erleide; hier also namentlich zeigt die im Kalkul unzuläßige Form $\frac{1}{0}$ an, daß es nicht möglich ist $e^{-\frac{1}{x^2}}$ in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln. — Ganz dasselbe gilt von allen übrigen Beispielen, welche Cauchy noch zu Gunsten seiner Behauptung anführt.

Solcher irriger Grundlehren enthält aber der oben erwähnte „Cours d'analyse 1821" bei all' seiner Trefflichkeit mehrere wesentliche und solche, die geeignet sind, die gesammte mathematische Analysis in große Verwirrung zu bringen. Man wird sich davon überzeugen, wenn man jene Schrift mit unsrer „ersten Abhandlung" d. h. mit dem „Geist der mathemat. Analysis 1842" sorgfältig vergleicht.

Diese, die Sache nicht an ihrer Wurzel erfassenden Ansichten des Cauchy haben übrigens auch bei uns deutsch Schreibenden oft zu großen Anklang gefunden. Wir heben hier nur die „Differential- und Integral-Rechnung" von Raabe, Zürich 1839, hervor, ein zu lobendes Werk, in welchem aber häufig das böse Prinzip über das gute die Oberhand behält, was dann entweder an einem schwerfälligen Gange, der nicht überzeugt, oder an einer Reihe anerkannt unrichtiger Resultate (besonders bei Auswerthung bestimmter Integrale) zu erkennen ist. In diesem Werke Raabe's finden wir gleich Anfangs statt des Taylor'schen Lehrsatzes, der die unendliche Reihe liefert, das durch die Lagrange'schen Grenzglieder zu einer endlichen Reihe umgeformte

Resultat, was nur reelle Werthe voraussetzt, also eine allgemeine Rechnung unmöglich macht.

Aus unseren, vorzüglich in der „ersten Abhandlung“ hingestellten Ansichten geht mit überzeugender Einfachheit hervor, daß bei allgemeinen Rechnungen die Bedingung der Convergenz der (noch allgemeinen) Reihen, eben so wohl etwas in der Ausführung unmögliches, als auch etwas Ueberflüßiges ist. — Solche und ähnliche Forderungen machen, heißt die Analysis ganz unnöthiger Weise ihres eigenen Wesens, nämlich der Allgemeinheit ihrer Untersuchungen berauben, sie ohne Noth in ihren Operationen lähmen, ja häufig ihre Anwendung theoretisch unmöglich, also den Erfolg gänzlich problematisch machen. Wie kann man z. B. in Anwendungen, so lange noch Unbekannte vorkommen, sich möglicher Weise allemal überzeugen, daß die Reihen, in deren Koefficienten die Unbekannten erscheinen, convergent sind? — Wenn man aber dann mit solchen Reihen dasselbe Rechnen, dessen Zweck ist, die Unbekannten zu bestimmen, nicht eher vornehmen dürfte, so lange nicht vorher dieselben Unbekannten wirklich bestimmt sind, wäre dann die Anwendung dieser Reihen zu diesem Zwecke nicht die Ausführung des Verlangens jenes Vaters, der seinem Sohne gebot, täglich im Fluße zu baden, aber nicht eher in das Wasser zu gehen, als bis er vorher schwimmen könne.

Um es noch einmal zu sagen, die Sache steht so: Die Funktiou f_{x+h} ist eine Reihenfolge angezeigter Operationen, d. h. diese Form f_{x+h} ist der Träger einer gewissen größern oder geringern Anzahl von Eigenschaften oder Merkmalen, also ein Begriff; und die Taylor'sche Reihe ist ein anderer Träger von genau denselben Eigenschaften oder Merkmalen, also (in einer andern Form) genau derselbe Begriff. Beide Ausdrücke eines und desselben Be-

griffes können daher unbedingt und so lange für einander gesetzt werden, als die Reihe noch allgemein ist, weil man dann mit ihr fortwährend (im Sinne des §. 3 der Abhdl. I.) „rechnen" kann, so daß sie den Ausdruck f_{x+h} (der entweder ein endlicher, oder selbst wieder eine unendliche Reihe, wie a^{x+h}, *Sin* (x+h) etc. etc. seyn kann) vollkommen ersetzt*). — Sie können aber auch beide dann noch für einander gesetzt werden, wenn die Reihe numerisch und konvergent wird, weil sie dann einen Werth hat, der an ihre Stelle tritt, und mit dem man weiter rechnen kann; und weil dann beide Seiten der Gleichung eine und dieselbe Zahl von der Form $q+q\cdot\sqrt{-1}$, (wo q auch Null seyn kann) vorstellen. In allen den Fällen der Anwendung dagegen, wo die Taylor'sche unendliche Reihe numerisch und zu gleicher Zeit divergent werden sollte, ist letztere eine im Kalkul nicht mehr zuläßige Form; und es kann daher von nun an nicht weiter mit ihr gerechnet werden. — In diesem Falle muß man dann den Lagrange-Taylor'schen Lehrsatz anwenden (mit den Grenzgliedern), wie weiter unten gezeigt werden soll.

§. 8.

I. Giebt man in einer Funktion f_{x+h}, dem x irgend einen besonderen Werth β, so kann es sich treffen, daß sich f_{x+h} nun gar nicht in eine nach positiven ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe verwandeln läßt, und da können folgende Fälle eintreten:

---

*) Die Beispiele, welche man dagegen anführen könnte, und namentlich das von Poisson im 19. Heft des Journal de l'école polyt. beigebrachte, werden alle in der Folge, da wo von ihnen die Rede seyn kann, ihre Aufklärung finden.

1) Die für f_{x+h} zu findende Reihe geht zwar nach positiven Potenzen von h fort, nimmt aber auch gebrochene Potenzen von h in sich auf. Ist z. B. $f_x = ax^3 + b(x-\beta)^{\frac{3}{2}}$ ist, so erhält man für $x=\beta$, $f_{\beta+h} = a(\beta+h)^3 + b \cdot h^{\frac{3}{2}}$; — und ist $f_x = a \cdot x^{\mu} + b \cdot x^{m} \cdot (x-\beta)^{\frac{2}{3}}$, so ist für $x=\beta$, $f_{\beta+h} = a \cdot (\beta+h)^{\mu} + b(\beta+h)^{m} \cdot h^{\frac{2}{3}}$.

2) Die für $f_{\beta+h}$ zu findende Reihe nimmt negative Potenzen von h in sich auf. — Ist z. B. $f_x = \frac{ax^n}{(x-\beta)^m}$ so findet sich für $x=\beta$, $f_{\beta+h} = \frac{a(\beta+h)^n}{h^m}$, wo m eben so gut ganz als gebrochen seyn kann, wenn nur positiv.

3) Oder es läßt sich für einen solchen bestimmten Werth β von x, die Funktion f_{x+h} gar nicht mehr nach Potenzen von h entwickeln (weder nach positiven, noch nach negativen ganzen oder gebrochenen). — Ist z. B. $f_x = a \cdot x^m + b \cdot \log(x-\beta)$, so ist $f_{\beta+h} = a(\beta+h)^m + b \cdot \log h$, während $\log h$ sich durchaus nicht nach Potenzen von h entwickelt.

II. So oft aber für irgend einen besondern Werth β von x, die Funktion f_{x+h} nicht nach ganzen Potenzen von h entwickelt werden kann, so oft muß derselbe besondere Werth β von x entweder schon f_x selbst, oder doch einen der Differential-Koefficienten df_x, d^2f_x, d^3f_x, d^4f_x etc. etc. auf eine im Kalkul unzuläßige Form, z. B. auf die Form $\frac{1}{0}$ oder $\log 0$ etc. etc. bringen, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, der Taylor'sche Lehrsatz augenblicklich und unbedingt die Entwicklung von f_{x+h} auch für diesen Werth von x,

in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe, liefern würde.

III. Und wenn f_x für $x = \beta$ noch zuläßig ist im Kalkul, also selbst noch nicht die Form $\frac{1}{o}$ oder *log* o etc. etc. in sich aufnimmt, so kann die Entwicklung von $f_{\beta+h}$ nach steigenden Potenzen von h nie negative Potenzen von h in sich aufnehmen; weil dann aus

$$f_{\beta+h} = a \cdot h^{-m} + b \cdot h^{-n} + \cdots + p \cdot h^{+\mu} + q \cdot h^{+\nu} + \cdots$$

für h=o Widersprüche hervorgehen würden.

Im Gegentheil muß in diesem Falle eine Entwicklung in der Form

$$(\mathbb{C}) \cdots f_{\beta+h} = f_\beta + P \cdot h^\mu + Q \cdot h^\nu + R \cdot h^\varrho + \cdots$$

möglich seyn, wo μ, ν, ϱ etc. etc. wachsend und positiv sind, ganz oder gebrochen.

Und wenn f_β noch eine im Kalkul zuläßige Form hat, und $f_{\beta+h}$ sich doch nicht nach ganzen Potenzen von h entwickeln läßt, sondern in seine Entwickelung auch gebrochene Potenzen von h aufnimmt, so finden doch für $f_{\beta+h}$ alle Glieder des Taylor'schen Lehrsatzes statt bis zu demjenigen exklusive, dessen Koefficient $d^n f_\beta$ der erste ist, welcher die im Kalkul unzuläßige Form in sich aufnimmt; — und das nächste Glied der Entwicklung ist dann nicht $d^n f_\beta \cdot \frac{h^n}{n!}$, sondern $S \cdot h^\alpha$ wo $\alpha > n-1$ aber $< n$ und S nicht Null ist*).

Ist also schon df_β eine im Kalkul unzuläßige Form, so ist

---

*) Man überzeugt sich von der Wahrheit dieser letztern Behauptungen, wenn man die Gleichung ($\mathbb{C}$) hinter einander nach h differenzirt, und in allen den Resultaten o statt h setzt.

$$f_{\beta+h} = f_\beta + P \cdot h^\mu + \cdots$$

und bereits $\mu < 1$, obgleich μ positiv seyn muß.

Ist aber erst $d^2 f_\beta$ eine im Kalkul unzuläßige Form, so hat man

$$f_{\beta+h} = f_\beta + df_\beta \cdot h + P \cdot h^\mu + \cdots,$$

wo $\mu > 1$ aber < 2 ist. U. s. w. f.

NB. In diesem vorstehenden Kapitel möge der Leser lauter (runde) ∂ statt der (stehenden) d gesetzt denken. In der Folge wird dieser Druck- u. Korrekturfehler strenge vermieden werden.

Zweites Kapitel.

Integrale entwickelt gegebener Funktionen.

Erste Abtheilung.

Von den unbestimmten Integralen.

§. 9.

Unter dem Integral einer Funktion φ_x nach x, versteht man jede Funktion f_x, deren Differential-Koefficient nach x, dieser Funktion φ_x wieder gleich ist. Man bezeichnet solches durch das Zeichen

$$\int \varphi_x \cdot dx \quad \text{oder} \quad \int \varphi \cdot dx,$$

wo das angehängte dx zunächst nur andeutet, daß der Differential-Koefficient der, durch $\int \varphi \cdot dx$ ausgedrückten Funktion f_x, nach x genommmen werden muß, um φ_x wieder zu haben, so daß

$$\int \varphi \cdot dx = f_x \quad \text{mit} \quad \partial f_x = \varphi_x$$

zugleich statt findet.

Aus dieser Definition geht sogleich hervor, daß jede Funktion φ_x unendlich-viele, jedoch alle nur um einen nach x konstanten Ausdruck verschiedene Integrale hat, und daß,

wenn f_x eines derselben vorstellt, dann f_x+C alle darstellen wird, wenn man C ganz unbestimmt läßt, aber von x unabhängig sich denkt. Daher der Unterschied zwischen besonderem Integral f_x und allgemeinem Integral f_x+C.

Man findet ferner nach dieser Definition sogleich:

A. für die einfachsten Funktionen:

$$1)\ \int x^m\cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1};\quad 2)\ \int a^x\cdot dx = \frac{a^x}{log\,a};$$

$$3)\ \int \frac{1}{x}\cdot dx = log\,x;\quad 4)\ \int log\,x\cdot dx = x(-1+log\,x);$$

$$5)\ \int Sin\,x\cdot dx = -Cos\,x;\quad 6)\ \int Cos\,x\cdot dx = Sin\,x.$$

Hinsichtlich der 1. muß bemerkt werden, daß es besser ist

$$\int x^m\cdot dx = x\cdot\frac{x^m}{m+1}$$

zu schreiben, und dann festzuhalten, daß x^m links und rechts allemal eine und dieselbe ihrer Formen (Werthe) vorstelle. Eben so muß man hinsichtlich der 2. bemerken, daß derjenige der Werthe von $log\,a$ im Nenner zur Rechten gemeint ist, welcher in $e^{x.log\,a}=a^x$, der jedesmaligen der unendlich-vielen Formen von a^x entspricht.

B. Allgemeine Gesetze des Integrirens:

$$\text{I.}\quad \int A\varphi_x\cdot dx = A\cdot\int\varphi_x\cdot dx;$$

$$\text{II.}\quad \int(\varphi_x\pm\psi_x)\cdot dx = \int\varphi_x\cdot dx \pm \int\psi_x\cdot dx;$$

$$\text{III.}\quad \int(\varphi_x\cdot\psi_x)\cdot dx = \varphi_x\int\psi_x\cdot dx - \int(\partial\varphi_x\cdot\int\psi_x\cdot dx)\cdot dx$$

wenn man unter $\int\psi\cdot dx$, so oft es in dieser letztern Formel erscheint, jedesmal ein und dasselbe besondere Integral versteht; endlich

$$\int\varphi_x\cdot dx = \int(\varphi_{(z)}\cdot\partial x_z)\cdot dz,$$

im Falle zwischen x und z irgend eine Gleichung angenommen, also statt x irgend eine Funktion eines neuen, in φ_x noch nicht vorkommenden Buchstaben z, gesetzt wird, und $\varphi_{(z)}$ das bedeutet, was aus φ_x wird, wenn man statt x diese Funktion von z setzt *).

Aus dieser Formel IV. geht sogleich (mit Zuziehung der Formeln 1—6) hervor, daß wenn eine Funktion f_x auf eine der Formen

$$\varphi^m \cdot \partial\varphi_x; \quad a^\varphi \cdot \partial\varphi_x; \quad \frac{\partial\varphi_x}{\varphi}; \quad Sin\,\varphi \cdot \partial\varphi_x; \quad Cos\,\varphi \cdot \partial\varphi_x$$

gebracht werden kann, dann ihr Integral nach x, augenblicklich gefunden ist; selbiges ist nämlich bezüglich

V. $\begin{cases} \dfrac{\varphi^{m+1}}{m+1} \text{ oder } \varphi \cdot \dfrac{\varphi^m}{m+1}, \text{ wo } \varphi^m \text{ denselben Werth vorstellt;} \\ \dfrac{a^\varphi}{log\,a} \text{ oder } \dfrac{e^{\varphi \cdot log\,a}}{log\,a}, \text{ wo } log\,a \text{ denselben Werth hat;} \\ \text{ferner } log\,\varphi; \quad -Cos\,\varphi \text{ und } Sin\,\varphi. \end{cases}$

VI. Auch folgt aus IV. sogleich noch, daß wenn $\int \varphi_x \cdot dx = f_x$ gefunden ist, dann allemal auch

$$\int \varphi_{ax+b} \cdot dx = \frac{1}{a} f_{ax+b}$$

seyn müsse.

Anmerkung. Da diese Gesetze B., die einzigen, nach denen man das Integriren versuchen kann, nicht geeignet sind, um allemal die Integration der zusammengesetzteren Funktionen auf die Integrale der einfacheren zurückzuführen, so kann man das Integriren nicht so systematisch durchführen,

---

*) Die Anwendung der Formel III. heißt das „theilweise Integriren"; die Anwendung der Formel IV. dagegen wird das „Integriren durch Substitution" genannt.

wie das Differenziiren; ja es ist sogar selten, daß eine in endlicher Form gegebene Funktion von x, auch ein Integral in endlicher Form hat. Dies ist der Grund, warum man die einzelnen Klassen der Funktionen durchnimmt und zusieht, wie viele und welche Formen in jeder Klasse sich einer Integration in endlicher Form unterziehen. Die nächsten §§. mögen dies nun thun.

§ 10.

A. Die algebraischen ganzen rationalen Funktionen von x, nämlich z. B. ax^3+bx^2+cx+d oder $Ax^\alpha+Bx^\beta+Cx^\gamma+\cdots$ lassen sich allemal ohne Weiteres integriren (nach §. 9. B. I. u. II. u. A. 1); und die letztere Form auch dann noch, wenn α, oder β, oder γ etc. etc. negativ ganz oder positiv oder negativ gebrochene Zahlen seyn sollten, die Funktion selbst also zu den gebrochenen oder gar zu den irrationalen (algebraischen) Funktionen gehörte; ja diese Integration findet eben so statt, wenn α, β, γ etc. ganz allgemein und nur von x unabhängig gedacht werden.

B. Jede gebrochene rationale (algebraische) Funktion von x wird dadurch integrirt, daß man sie in eine ganze Funktion und in eine ächt gebrochene verwandelt (wenn sie nicht schon bloß ächt gebrochen ist), letztere aber in lauter Parzialbrüche von der Form $\frac{A}{\alpha x+\beta}$, oder der Form $\frac{A}{(\alpha x+\beta)^m}$ zerlegt, und diese dann nach §. 9. B. VI., I. und A. 3. 1. sogleich integrirt. Man findet nämlich nach den angeführten Formeln

$$7)\quad \int \frac{A}{\alpha x+\beta}\cdot dx = \frac{A}{\alpha}\cdot log\,(\alpha x+\beta);$$

$$8)\quad \int \frac{A}{(\alpha x+\beta)^m}\cdot dx = -\frac{A}{\alpha(m-1)}\cdot\frac{1}{(\alpha x+\beta)^{m-1}}.$$

Anmerkung. Sind die Koeffcienten der gebrochenen Funktion reell, und hat der Nenner sogenannte imaginäre einfache Faktoren, nämlich die Faktoren $x-(p\pm qi)$, so kann man sogenannte doppelte Partialbrüche bilden, welche die Form

$$\frac{ax+b}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} \text{ oder } \frac{ax+b}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^m}$$

haben, während $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha[x-(p+qi)][x-(p-qi)]$ $=\alpha(x^2-2px+p^2+q^2)$, also $\beta=-2\alpha p$ und $\gamma=\alpha(p^2+q^2)$ ist. — Für diesen Fall findet man (wenn die Zerlegung

$$\frac{ax+b}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\frac{A+Bi}{x-p+qi}+\frac{A-Bi}{x-p-qi}$$

giebt, so daß $A=\frac{a}{2\alpha}$ und $B=\frac{b+2ap}{2\alpha q}$ wird)

$$9)\int\frac{ax+b}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\cdot dx=\frac{a}{2\alpha}\cdot log(\alpha x^2+\beta x+\gamma)+\frac{b+2ap}{2\alpha q}\cdot\frac{1}{Tg}\frac{x-p}{q}{}^{*}$$

wo $p=-\frac{\beta}{2\alpha}$ und $q=\frac{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}$ ist.

Für den andern Parzial-Bruch bildet man sich die Reduktions-Formel

$$10)\int\frac{ax+b}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^m}\cdot dx=\frac{Cx+D}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^{m-1}}+E\int\frac{1}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^{m-1}}\cdot dx,$$

---

*) Diese Gleichung giebt noch

$$9a)\int\frac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}.dx=\frac{1}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}\cdot\frac{1}{Tg}\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}};$$

und obgleich dieses Resultat gilt, es mag $4\alpha\gamma-\beta^2$ positiv oder negativ seyn, so giebt doch im letztern Fall, wo die einfachen Faktoren des Nenners reell sind, die direkte Zerlegung in einfache Parzialbrüche und deren Integration, bequemer

$$9b)\int\frac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}.dx=\frac{1}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}log\frac{2\alpha x+\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha x+\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}.$$

wo $C=\frac{1}{m-1}\cdot\frac{\beta a-2\alpha b}{\beta^2-4\alpha\gamma}$, $D=\frac{1}{m-1}\cdot\frac{2\gamma a-\beta b}{\beta^2-4\alpha\gamma}$

und $E=\frac{2m-3}{m-1}\cdot\frac{\beta a-2\alpha b}{\beta^2-4\alpha\gamma}=(2m-3)C$

gefunden wird*). Diese Formel 10. führt zuletzt auf das Integral 9., wenn m positiv ganz ist, oder, im Falle m gebrochen seyn sollte, so daß die Funktion zu den irrationalen gehört, zu der Integration von $\frac{1}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^\mu}$, wo $\mu<1$ ist, zurück.

§. 11.

Von den algebraischen irrationalen Funktionen lassen sich nur sehr wenige in endlicher Form integriren, und dann gewöhnlich dadurch, daß man sie rational macht. Dies geschieht namentlich, wenn nur eine Wurzel von der Form $\sqrt[n]{a+bx}$ oder von der Form $\sqrt[n]{\frac{a+bx}{c+dx}}$ vorkommt, indem man die Wurzel $=z$ setzt; oder, wenn aus einem und demselben Radikanden von der Form $a+bx$ oder $\frac{a+bx}{c+dx}$, mehrere Wurzeln und zwar die n^{te}, p^{te}, q^{te} Wurzel, zugleich vorkommen, indem man den Radikanden $=z^{npq}$ setzt, — und jedesmal die Formel §. 9. B. IV. anwendet, d. h. durch Substitution integrirt.

Kommt aber in einer zu integrirenden algebraischen Funktion von x, bloß die einzige trinomische Quadrat-Wurzel $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ vor (ein oder mehreremale), so setzt man solche

*) Man nimmt die Form 10. an, differenziirt und vergleicht, so ergeben sich die anfangs unbestimmt gelassenen Koefficienten C, D, E ohne Weiteres.

a) entweder $=x\sqrt{\alpha}+z$,

b) oder $=\sqrt{\gamma}+xz$,

c) oder, man zerlegt den Radikanden $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ in zwei Faktoren $\alpha(x-p)(x-q)$ und setzt dann die Wurzel selbst $=(x-p)z$.

Auf jede dieser drei Arten bekommt man dann allemal statt der irrationalen Funktion von x, indem man die Formel §. 9. B. IV. anwendet, eine rationale Funktion von z zu integriren, deren Integral nach §. 10. gefunden wird.

Auf diesem Wege erhält man das einfachste Beispiel dieser Art

$$11)\int\sqrt{\frac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}\cdot dx=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot log\left(\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}+\frac{2\alpha x+\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)$$

oder auch $$=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot log\left(2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}+2\alpha x+\beta\right)$$

12) dasselbe $$=-\frac{1}{\sqrt{-\alpha}}\cdot\frac{1}{Sin}\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}\text{*)}$$

---

*) Zur Umformung logarithmischer Formen in Argumente (Bogen) oder umgekehrt, bedient man sich der Formeln

$$\frac{1}{Sin}x=\frac{1}{i}.log\left(\sqrt{1-x^2}+xi\right);$$

$$\frac{1}{Cos}x=\frac{1}{i}.log\left(x+i.\sqrt{1-x^2}\right);$$

$$\frac{1}{Tg}x=\frac{1}{2i}.log\frac{1+x.i}{1-x.i};$$

ferner

$$log\,x=i.\frac{1}{Sin}\left(\frac{1}{i}.\frac{x^2-1}{2x}\right)$$

$$=i.\frac{1}{Cos}\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)$$

$$=i.\frac{1}{Tg}\left(\frac{1}{i}.\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

wo $i^2=-1$, also $\frac{1}{i}=-i$ ist. — Man kann aber zu einem In-

Anmerkung 1. Auf dieses einfachste Integral kann man aber wieder zurückführen das Integral von

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+\cdots}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$$

so wie das von $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ selbst, in so ferne diese Wurzel auch so: $\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$ sich schreiben läßt. Man setzt zu dem Ende

$$\int\frac{ax^n+bx^{n-1}+\cdots+px+q}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}\cdot dx$$
$$=(Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\cdots+Px+Q)\cdot\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$$
$$+R\cdot\int\frac{1}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}\cdot dx,$$

differenziirt und vergleicht, und erhält (aus der Vergleichung) n+1 Gleichungen, aus denen sich die n+1 unbestimmten Koefficienten A, B, ⋯ P, Q, R ohne Weiteres bestimmen.

Auf diesem Wege findet man namentlich

13) $$\int\frac{x}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}\cdot dx=\frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$$
$$-\frac{\beta}{2\alpha}\int\frac{1}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}\cdot dx;$$

14) $$\int\frac{x^2}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}\cdot dx=\left(\frac{1}{2\alpha}x-\frac{3\beta}{4\alpha^2}\right)\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$$
$$+\frac{3\beta^2-4\alpha\gamma}{\gamma\alpha^2}\int\frac{1}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}\cdot dx$$

u. s. w. f.; und man kann auch aus diesen letztern und be-

tegral, ehe man es umformt, vorher irgend eine Konstante (nach x) addiren. Dadurch erhält man oft einfachere neue Formen, als Integral.

sonderen Resultaten das allgemeinere wieder zusammensetzen, in so fern man auch

$$15)\ \int \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}\cdot dx = a\cdot\int\frac{x^2}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}\cdot dx + b\cdot\int\frac{x}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}\cdot dx + c\cdot\int\frac{1}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}\cdot dx$$

nehmen kann *).

Hätte man $\frac{1}{x^n\cdot\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}\cdot dx$ zu integriren, so würde man $x=\frac{1}{z}$ setzen und (nach §. 9. B. IV.) finden

$$16)\ \int\frac{1}{x^n\cdot\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}\cdot dx = -\int\frac{z^{n-1}}{\sqrt{\alpha+\beta z+\gamma z^2}}\cdot dz.$$

Hätte man endlich

$$\frac{f_x}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$$

zu integriren, während f_x eine gebrochene algebraische rationale Funktion von x vorstellt, so würde man f_x in seine Parzialbrüche zerlegen von der Form $\frac{A}{px+q}$ oder $\frac{B}{(px+q)^n}$, dann lauter Theil-Funktionen von der Form

$$\frac{A}{(px+q)\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}\cdot dx \text{ oder } \frac{B}{(px+q)^n\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}\cdot dx$$

---

*) Dieses Zurückführen der zusammengesetzteren Beispiele auf die einfachsten ist deshalb so wichtig, weil das direkte Rational-Machen und das darauf folgende Integriren der rationalen Funktion, bei den zusammengesetzteren Fällen in der Regel ungemeine Rechnungen verursacht.

zu integriren haben, diese aber dadurch, daß man $px+q=z=\frac{1}{v}$ setzt, mittelst des Weges der Substitution auf die Integration von $\frac{1}{\sqrt{av^2+bv+c}}\cdot dv$ oder $\frac{v^{n-1}}{\sqrt{av^2+bv+c}}\cdot dv$ zurückführen.

Anmerkung 2. So oft aber $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (mit oder ohne Quadrat-Wurzelzeichen) in einer Funktion von x vorkommt, so oft kann man $x+\frac{\beta}{2\alpha}=y$ setzen, und es verwandelt sich dadurch $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ in $\alpha y^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ d. h. in die Form $\alpha y^2\pm\delta$ oder, wenn α negativ ist, in die Form $\delta-\varepsilon y^2$. Setzt man dann einen konstanten Faktor heraus (δ oder $\sqrt{\delta}$), so erhält man die Form $1\pm\frac{\varepsilon}{\delta}y^2$, und wird dann $y\sqrt{\frac{\varepsilon}{\delta}}=v$ gesetzt, so erhält man zuletzt die Form $1\pm v^2$. — Durch dieses Verfahren und durch die immer wiederholte Anwendung der Formel §. 9. B. IV. kann man auf diese 4 einfachsten Integrale, nämlich auf

17) $\int\frac{1}{1+x^2}\cdot dx=\frac{1}{Tg}x$; *)

18) $\int\frac{1}{1-x^2}\cdot dx=\frac{1}{2}\,log\,\frac{1+x}{1-x}$;

19) $\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot dx=log\,(x+\sqrt{1+x^2})$;

20) $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx=\frac{1}{Sin}x$

---

*) Die Zeichen $\frac{1}{Tg}x$, oder $\frac{1}{Sin}x$ etc. stellen hier immer ganz allgemein alle die Funktionen von x vor, deren Tangente, oder Sinus, $=x$ ist.

nach und nach zurückführen und dadurch finden die nachstehenden, nämlich

$$21)\quad \int \frac{1}{a+bx^2}\cdot dx = \frac{1}{\sqrt{ab}}\cdot\frac{1}{Tg}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right);$$

$$22)\quad \int \frac{1}{a-bx^2}\cdot dx = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\cdot log\,\frac{1+x\sqrt{\frac{b}{a}}}{1-x\sqrt{\frac{b}{a}}};$$

$$23)\quad \int \frac{x}{a\pm bx^2}\cdot dx = \pm\frac{1}{2b}\cdot log\,(a\pm bx^2)\ (\S.\ 9.\ V.);$$

$$24)\quad \int \frac{1}{\sqrt{a+bx^2}}\cdot dx = \frac{1}{\sqrt{b}}\cdot log\,(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2});$$

$$25)\quad \int \frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}\cdot dx = \frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{Sin}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right);$$

$$26)\quad \int \frac{x}{\sqrt{a\pm bx^2}}\cdot dx = \pm\frac{1}{b}\sqrt{a\pm bx^2}\ (\S.\ 7.\ V.);$$

$$27)\quad \int \frac{1}{x\cdot\sqrt{a\pm bx^2}}\cdot dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot log\,\frac{\sqrt{a\pm bx^2}-\sqrt{a}}{x};$$

sowie auch die Formeln 11. und 12. noch einmal.

§. 12.

Kommen wir nun zu den wenigen transcendenten Funktionen (logarithmischen und exponentiellen, zu welchen auch die sogenannten trigonometrischen gehören), welche einer Integration in endlicher Form fähig sind.

---

*) Unter den Zeichen $Tg\,x$, $Cotg\,x$ verstehen wir hier immer die Quotienten $\frac{Sin\,x}{Cos\,x}$, $\frac{Cos\,x}{Sin\,x}$ der beiden allgemeinen unendlichen Sinus- und Kosinus-Reihen.

I. Alle Funktionen, welche einen oder mehrere der Ausdrücke *Sin* x, *Cos* x, *Tg* x, *Cotg*x *) enthalten, werden dadurch auf die Integration algebraischer Funktionen zurückgebracht, daß man entweder *Sin* x = z oder *Cos* x = z setzt. Auf diese Weise findet man

28) $\int Tg\, x \cdot dx = -\log Cos\, x;$

29) $\int Cotg\, x \cdot dx = \log Sin\, x;$ *)

30) $\int \frac{1}{Cos\, x} \cdot dx = \log Tg\, (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x);$

31) $\int \frac{1}{Sin\, x} \cdot dx = \log Tg\, \frac{1}{2}x;$

32) $\int \frac{1}{1 + Cos\, x} \cdot dx = Tg\, \frac{1}{2}x;$

33) $\int \frac{1}{a + b \cdot Cos\, x} \cdot dx =$

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot \log \frac{b + a \cdot Cos\, x + \sqrt{b^2 - a^2} \cdot Sin\, x}{a + b \cdot Cos\, x}$$

34) dasselbe $= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{1}{Cos} \frac{b + a \cdot Cos\, x}{a + b \cdot Cos\, x};$

35) $\int \frac{Sin\, x}{a + b \cdot Cos\, x} \cdot dx = -\frac{1}{b} \cdot \log(a + b \cdot Cos\, x)$ (§. 7. V.);

36) $\int \frac{Cos\, x}{a + b \cdot Cos\, x} \cdot dx = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{1}{a + b \cdot Cos\, x} \cdot dx.$

Kommen Sinus oder Kosinus der vielfachen Bogen, also *Sin* bx, *Cos* bx, oder gar *Sin* (a+bx) und *Cos* (a+bx) vor, so wendet man den Satz §. 7. VI. an, nach welchem $\int f_{a+bx} \cdot dx$ gefunden wird, wenn man $\int f_x \cdot dx$ findet, in dem Resultat a+bx statt x setzt, und selbiges noch durch b dividirt.

---

*) Diese Nummern 28 und 29 gehen auch aus §. 9. B. V. direkt hervor.

Produkte und Potenzen von $Sin\, x$ und $Cos\, x$, oder von $Sin(a+bx)$, $Cos(a+bx)$ werden vorher in eine Reihe von Sinus und Kosinus der vielfachen Bogen, d. h. von $Sin(p+qx)$, $Cos(p+qx)$ umgeformt und dann integrirt.

II. Die logarithmischen Funktionen, wozu auch die Argumente (Bogen) gehören; als

$$log\, x,\quad \frac{1}{Sin}x,\quad \frac{1}{Cos}x,\quad \frac{1}{Tg}x,\quad \frac{1}{Cotg}x$$

werden dadurch integrirt, daß man jeder dieser Funktionen den Faktor 1 anhängt, und sie dann theilweise integrirt d. h die Formel §. 9. B. III. (indem man $\psi=1$, $\int\psi\cdot dx=x$ nimmt) anwendet. — Mit Zuziehung der Bemerkung §. 9. VI. sind dann auch $log(a+bx)$, $\frac{1}{Sin}(a+bx)$, $\frac{1}{Cos}(a+bx)$, $\frac{1}{Tg}(a+bx)$ und $\frac{1}{Cotg}(a+bx)$ integrirt.

III. Durch diese fortgesetzte theilweise Integration (Anwendung der Formel §. 9. B. III.) behandelt man auch die Integrale der Funktionen $a^x\cdot x^n$; $x^n\cdot Sin\, x$; $x^n\cdot Cos\, x$; $e^{ax}\cdot Sin\, bx$; $e^{ax}\cdot Cos\, bx$; $x^n\cdot e^{ax}\cdot Sin\, bx$; $x^n\cdot e^{ax}\cdot Cos\, bx$; u. s. w.; wo man sowohl den einen als den andern der beiden Faktoren statt φ oder statt ψ setzen kann (in §. 9. B. III.), so daß man immer das zusammengesetztere Integral auf das einfachere zurückführt, es mag n positiv oder negativ seyn.

Ist n positiv ganz, so findet man von den 3 erstern dieser Funktionen ein Integral in endlicher Form. — Ist aber n negativ ganz so reduciren sich diese Integrale auf

$$\int\frac{a^x}{x}\cdot dx,\quad \int\frac{Sin\, x}{x}\cdot dx \text{ oder } \int\frac{Cos\, x}{x}\cdot dx,$$

während, wenn $x\cdot log\, a=z$ und $e^z=v$ gesetzt wird, das

erstere dieser 3 Integrale (wie auch die beiden andern) wieder auf $\int \frac{e^z}{z} \cdot dz$ und auf $\int \frac{1}{log\, v} \cdot dv$ zurückgeführt wird, welches letztere Integral unter dem Namen des **Integral-logarithmen** behandelt worden ist*). Diese 3 letzteren Integrale lassen sich aber in endlicher Form nicht herstellen. —

§ 13.

Man hat sich noch mit der Auffindung von

$$\int (Sin\, x)^m \cdot (Cos\, x)^n \cdot dx, \quad \int x^{m-1} \cdot (a+bx^n)^p \cdot dx$$

und von
$$\int (ax+b)^\mu \cdot (px+q)^\nu \cdot dx,$$

die alle dreie auf einander zurückgeführt werden können, beschäftigt, und zu dem Ende die nachstehenden Reduktions-Formeln gebildet, nämlich:

A. Wenn man theilweise integrirt, so findet sich

$$\int (ax+b)^\mu \cdot (px+q)^\nu \cdot dx$$

$$37) = \frac{(ax+b)^\mu \cdot (px+q)^{\nu+1}}{(\nu+1)p} - \frac{\mu a}{(\nu+1)p} \int (ax+b)^{\mu-1} \cdot (px+q)^{\nu+1} \cdot dx;$$

$$38) = \frac{(ax+b)^\mu \cdot (px+q)^{\nu+1}}{(\mu+\nu+1)p} - \frac{\mu(aq-bp)}{(\mu+\nu+1)p} \int (ax+b)^{\mu-1} \cdot (px+q)^\nu \cdot dx;$$

$$39) = \frac{(ax+b)^{\mu+1} \cdot (px+q)^{\nu+1}}{(\mu+1)(aq-bp)} - \frac{(\mu+\nu+2)p}{(\mu+1)(aq-bp)} \int (ax+b)^{\mu+1} \cdot (px+q)^\nu \cdot dx;$$

---

*) Da *Sin* x und *Cos* x nichts anderes sind, als Exponential-Ausdrücke, welche aus e^{xi} und e^{-xi} zusammengesetzt sind, so lassen sich auch $\int \frac{Sin\, x}{x} \cdot dx$ und $\int \frac{Cos\, x}{x}$ auf den Integral-Logarithmen zurückführen.

und noch 3 solche Formeln, die man erhält, wenn in den vorstehenden a und p, b und q, μ und ν gleichzeitig mit einander vertauscht werden*). — Mittelst dieser 6 Formeln kann das Integral $\int (ax+b)^{\mu}\cdot(px+q)^{\nu}\cdot dx$, es mögen μ und ν, unabhängig von einander positiv oder negativ seyn, immer auf das einfachste derselben Gattung zurückgebracht werden, in welchem die Exponenten μ und ν zwischen o und -1 liegen. — Und sind die Zahlen μ, ν und $\mu+\nu$ rational, und ist eine darunter ganz, so findet man das Integral in endlicher Form ohne Weiteres.

B. Setzt man in diesen Formeln $px+q=z^n$, also $ax+b=\frac{a}{p}z^n+(b-\frac{aq}{p})$, so erhält man noch die nachstehenden Reduktions-Formeln (welche natürlich auch direkt gefunden werden können), nämlich

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\cdot dx$$

$$40)\quad = \frac{x^{m-n}\cdot(a+bx^n)^{p+1}}{b(pn+m)} - \frac{a(m-n)}{b(pn+m)}\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^p\cdot dx;$$

---

*) Cauchy verschafft sich diese 6 Reduktions-Formeln, indem er in die Gleichung $\int uv.d(\log v) = uv - \int uv.d(\log u)$ nach und nach statt u und v, je zwei der Ausdrücke $ax+b$, $px+q$, $\frac{ax+b}{px+q}$, $\frac{px+q}{ax+b}$ substituirt. — Auch geht die 38. aus 37. hervor, wenn man in 37. das Integral zur Rechten in zweie zerlegt, dadurch daß man einen Faktor $px+q$ absondert, selbigen aber so schreibt, nämlich

$$\frac{p}{a}(ax+b)+(q-\frac{bp}{a}).$$

Die 39. geht endlich aus der 38. hervor, dadurch, daß man $\mu+1$ statt μ schreibt, und dann das Integral zur Rechten in das zur Linken ausdrückt.

$$41) = \frac{x^m (a+bx^n)^p}{pn+m} + \frac{pna}{pn+m} \int x^{m-1} (a+bx^n)^{p-1} \cdot dx;$$

$$42) = \frac{x^m (a+bx^n)^{p+1}}{am}$$
$$- \frac{b(m+n+np)}{am} \int x^{m+n-1} (a+bx^n)^p \cdot dx;$$

$$43) = -\frac{x^m (a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)na}$$
$$+ \frac{m+n+np}{(p+1)na} \int x^{m-1} (a+bx^n)^{p+1} \cdot dx;$$

In dieser letztern steckt z. B. sogleich

$$44) \int \frac{1}{(1+y^2)^n} \cdot dy = \frac{y}{2(n-1)(1+y^2)^{n-1}}$$
$$+ \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{1}{(1+y^2)^{n-1}} \cdot dy,$$

welches ein besonderer Fall der Nr. 10. in §. 10. ist, aus welchem aber jene Nr. 10. selbst wieder abgeleitet werden kann, so daß sie dieselbe Allgemeinheit hat als jene.

C. Das andere Integral

$$\int (Sin\, x)^\mu \cdot (Cos\, x)^\nu \cdot dx$$

zieht sich auf das in A. behandelte Integral zurück, so wie man $(Sin\, x)^2 = z$, oder $(Cos\, x)^2 = z$ setzt; oder es zieht sich auch auf das in B. behandelte zurück, wenn man *Sin* x oder *Cos* x, $= z$ setzt. — Außerdem giebt aber die theilweise Integration (oder auch die unten in der Note angeführte Formel

$$\int uv \cdot d(log\, v) = uv - \int uv \cdot d(log\, u),^{*})$$

---

*) In dieser Formel sind links u und v als Funktionen von $y = log\, v$, rechts aber u und u als Funktionen von $z = log\, u$ angesehen, während, weil u und v Funktionen von x sind, auch y eine Funktion von z, und z eine Funktion von y ist.

wenn man statt u und v zwei der 4 Ausdrücke *Sin* x, *Cos* x, *Tg* x, *Cotg* x setzt) augenblicklich die Reduktions-Formeln

$$45)\quad \int (Sin\, x)^{\mu}\cdot(Cos\, x)^{\nu}\cdot dx$$

$$= -\frac{(Sin\, x)^{\mu-1}(Cos\, x)^{\nu-1}}{\nu+1} + \frac{\mu-1}{\nu+1}\int (Sin\, x)^{\mu-2}(Cos\, x)^{\nu+2}\cdot dx\,;$$

$$46)\quad = -\frac{(Sin\, x)^{\mu-1}(Cos\, x)^{\nu+1}}{\mu+\nu} + \frac{\mu-1}{\mu+\nu}\int (Sin\, x)^{\mu-2}(Cos\, x)^{\nu}\cdot dx\,;$$

$$47)\quad = \frac{(Sin\, x)^{\mu+1}(Cos\, x)^{\nu+1}}{\mu+1} + \frac{\mu+\nu+2}{\mu+1}\int (Sin\, x)^{\mu+2}(Cos\, x)^{\nu}\cdot dx.$$

Weitere 3 Formeln ergeben sich aus 45.—47., wenn man μ und ν vertauscht und $\frac{1}{2}\pi - x$ statt x schreibt, wodurch *Sin* x in *Cos* x, und *Cos* x in *Sin* x, und das Zeichen des ersten Gliedes zur Rechten in das entgegengesetzte übergeht *).

Diese letzteren Formeln dienen dazu, das Integral

$$\int (Sin\, x)^{\mu}\cdot(Cos\, x)^{\nu}\cdot dx,$$

es mag μ oder ν positiv oder negativ seyn, auf dasselbe zurückzuführen, in welchem aber die Exponenten μ und ν zwischen o und —1 liegen, oder — das Integral auf die Nr. 28—31. des §. 12. oder auf $\int 1\cdot dx = x$, oder doch auf

*) Auch findet sich noch die 46. aus der 45., wenn man in dem Integral zur Rechten (in 45.) den Faktor $(Cos\, x)^2$ absondert, $1-(Sin\, x)^2$ dafür schreibt und das Integral dadurch in zwei Integrale zerlegt. — Die 47. geht endlich aus der 45. hervor, wenn man in letzterer $\mu+2$ statt μ setzt und das Integral zur Rechten in das zur Linken ausdrückt.

$$48)\int \frac{1}{Sin\,x \cdot Cos\,x} \cdot dx = log\,Tg\,x$$

zurückzuführen *). — Endlich kann dasselbe Integral allemal in endlicher Form integrirt werden, so oft $\frac{\mu-1}{2}$, $\frac{\nu-1}{2}$ und $\frac{\mu+\nu-2}{2}$ rationale Zahlen sind, und eine derselben zu gleicher Zeit ganz ist.

§. 14.

Wie oft man aber auch algebraische aber irrationale, oder transcendente Funktionen wird integriren können, immer sind es doch gewissermaßen nur Ausnahmsformen, welche ein Integral in endlicher Form zulassen. Im Allgemeinen wird man daher zu unendlichen Reihen seine Zuflucht nehmen müssen, wenn man ein allgemeines Integral haben will.

Man kann aber, wenn φ_x nach x soll integrirt werden, die Funktion φ_x vorher umformen

a) in eine Reihe die nach Potenzen von x oder von $x-\alpha$ fortläuft; so daß jedes einzelne Glied die Form

*) Cauchy schreibt bei dieser und bei allen ähnlichen Formeln allemal statt $log\,Tg\,x$ lieber $\frac{1}{2}log(Tg\,x)^2$ offenbar deshalb, weil er sich auch den Fall denkt, wo $Tg\,x$ negativ seyn könnte, und wo also $log\,Tg\,x$ imaginär zu werden droht, während $(Tg\,x)^2$ allemal positiv ist, so lange nur x reell ist. — Nach den hier vertretenen Ansichten ist diese lästige Beschränkung überflüßig, da nach den hier vorläufig gegebenen Definitionen, sowohl wenn man differenziirt, als wenn man integrirt (nach x), der Veränderliche x ganz Inhaltlos, ein bloßer Träger der Operationen ist, und daher weder als positiv noch als negativ gedacht wird; und weil das Integral (nach x) gefunden ist, sobald die gefundene Funktion, wenn sie (nach x) wieder differenziirt wird, die gegebene Funktion wieder liefert, dies letztere aber hier bei $log\,Tg\,x$ eben so gut der Fall ist, als bei $\frac{1}{2}log(Tg\,x)^2$.

$A \cdot (x-\alpha)^n$ erhält und, integrirt, $\frac{A}{n+1}(x-\alpha)^{n+1}$ liefert, oder

b) in eine Reihe die nach Potenzen von z fortläuft, wo z irgend eine andere Funktion von x ist, so daß jedes Glied die Form $A \cdot z^n$ erhält und zum Integral $\int Az^n \cdot dx$ d. h. $A\int z^n \cdot dx$ hat; oder

c) in die Form $\psi_x \cdot R_x$, wo R_x eine solche unter a) und b) angeführte Reihe ist, so daß man Glieder zu integriren bekommt von der Form $Ax^n \cdot \psi_x$, oder von der Form $Az^n \cdot \psi_x$ (also etwa $A \cdot e^{\alpha nx} \cdot \psi_x$).

Die Ausführung des Vorschlags a) giebt

VII.

$$\int \varphi_x \cdot dx = \varphi_\alpha \cdot (x-\alpha) + \partial\varphi_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \partial^2\varphi_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \cdots,$$

wo φ_α, $\partial\varphi_\alpha$, $\partial^2\varphi_\alpha$ etc. etc. das bedeuten, was aus den Funktionen φ_x, $\partial\varphi_x$, $\partial^2\varphi_x$ etc. etc. wird, wenn man, nachdem sie hergestellt sind, α statt x setzt; und dieses Resultat gilt, wenn auch x ganz Inhaltlos, d. h. ein bloßer Träger der Operationen ist, also ohne daß man darauf zu sehen hätte, daß die Reihe selbst convergent ist. — Dagegen wissen wir aus der „Ersten Abhandlung“, daß wenn man für reelle Werthe von x Ziffern-Rechnungen anstellen will, diese Reihe nur dann dazu brauchbar ist, wenn sie convergirt.

Die Ausführung der Vorschläge b) und c) führt aber auch jedesmal zu allgemein-gültigen Resultaten, wenn nur solche zuletzt auf Reihen zurückgeführt werden können, welche die Form der ganzen Funktionen von x mit angebbaren Koefficienten haben. Und wir müssen hier wiederholen, daß es,

den hiesigen Ansichten zu Folge, durchaus nicht nothwendig ist, daß die unendlichen Reihen, von denen hier die Rede ist, convergiren, eben weil sie noch als ganz allgemeine Reihen gedacht werden, bei denen weder von Konvergenz noch von Divergenz derselben die Rede seyn kann.

Um dies noch durch ein Beispiel zu erläutern integrire man

$$1)\quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \text{in inf.}$$

links und rechts und bestimme die Konstante so, daß die entstehende Gleichung

$$2)\quad \log(1+x) = (\log 1) + x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \text{in inf.}$$

für irgend einen Werth von x, z. B. für $x=o$ richtig wird. — Obgleich nun die Gleichung 1. zu einer divergenten Reihe führt, so oft $x=1$ gesetzt wird, so ist doch die Gleichung 2. völlig geeignet, alle Werthe von $\log(1+x)$ für $x=1$, d. h. alle Werthe von $\log 2$ zu liefern, wovon man nicht überzeugt seyn könnte, wenn es nöthig wäre, bei der Integration der Reihe in 1. zur Rechten, die Bedingung zu machen, daß diese Reihe convergent seyn müsse. — Auch gilt die Gleichung 2., wie wir in der „Ersten Abhandlung" pag. 137. gesehen haben, eben so wie die Gleichung 1. ganz allgemein.

§. 15.

Es giebt aber auch noch eine andere Methode, ein Integral in Form einer unendlichen Reihe zu erhalten, nämlich die, in's Unendliche fortgesetzte theilweise Integration, d. h. die unendlich oft wiederholte Anwendung der Formel B. III. des §. 9. — Wendet man diese Formel z. B. auf das Integral von $x^n \cdot e^x$ an, so erhält man

$$\int x^n \cdot e^x \cdot dx = x^n \cdot e^x \cdot \left[1 - \frac{n}{x} + \frac{n^{2|-1}}{x^2} - \frac{n^{3|-1}}{x^3} + \text{in inf.}\right].$$

Sobald nur die unendlichen Reihen, auf welche man stößt, die Form von ganzen Funktionen von z haben, wo $z = x$, oder $z = \frac{1}{x}$, oder z irgend eine Funktion von x vorstellt, so sind die Resultate gleichfalls allgemein-gültige; im anderen Falle dagegen muß man da, wo man abbricht, nach derselben Formel §. 9. B. III., jedesmal noch das Ergänzungsglied hinzunehmen, um, wenn man es auch nicht sollte auswerthen können, in jedem Falle der Anwendung auf Ziffern-Rechnungen, wenigstens den ohngefähren Ziffern-Werth desselben beurtheilen zu können.

Auch die Methode der unbestimmten Koefficienten (wo man die Form des Integrals als eine unendliche Reihe sich denkt und annimmt, und dann die unbestimmt gelassenen konstanten Koefficienten noch, den Umständen gemäß bestimmt) führt zu allgemein-gültigen Resultaten, wenn sie zur Integration verwandt wird, sobald man nur die vorkommenden unendlichen Reihen in Form von ganzen Funktionen von z annimmt, während z irgend eine Funktion von dem x ist, nach welchem integrirt werden soll. — Bei der Annahme von Reihen von anderer Form dagegen kann die Bestimmung der Koefficienten kein theoretisches Hinderniß finden, wenn die Form der angenommenen Reihe auch nur für einen einzigen besonderen Fall die wahre seyn sollte; also brauchen dann die Resultate nicht allgemein-gültige zu seyn. (Vergl. die Aufsätze aus dem Gebiete der höhern Mathem. Berlin 1823.)

Also: Resultate, in Form von unendlichen Reihen, die auf einem dieser beiden so eben nä-

her bezeichneten Wege gefunden worden sind, müssen, nachdem sie gefunden sind, noch einer Untersuchung unterzogen worden, um den Umfang kennen zu lernen, in welchem sie gelten und gebraucht werden dürfen.

Zweite Abtheilung.

Von den allgemein-bestimmten Integralen.

§. 16.

Hat man $\int f_x \cdot dx = \psi_x$ gefunden, so erhält $\psi_x + C$ alle Integrale von f_x nach x, so lange C als ein ganz beliebiger Ausdruck gedacht wird, der aber den Veränderlichen x nicht in sich aufgenommen hat. Und $\psi_x - \psi_{\mathfrak{x}}$ ist unter allen diesen Integralen dasjenige, welches der Null gleich wird, so oft man $x = \mathfrak{x}$ nimmt. — Dieses besondere Integral, welches für $x = \mathfrak{x}$ der Null gleich wird, bezeichnen wir durch $\int_{x \div \mathfrak{x}} f_x \cdot dx$, so daß man hat

$$\text{I. } \int_{x \div \mathfrak{x}} f_x \cdot dx = \psi_x - \psi_{\mathfrak{x}}, \text{ wenn } \partial\psi_x = f_x \text{ ist,}$$

wo $\psi_{\mathfrak{x}}$ das bedeutet, was aus ψ_x wird, so oft man $\mathfrak{x}$ statt x setzt, während $\mathfrak{x}$ als ein ganz allgemeiner Werth von x gedacht wird (der eben so gut reell als auch imaginär seyn kann).

Dieses „für $x = \mathfrak{x}$ verschwindende" Integral ist noch immer eine Funktion von x, solches mag übrigens in endlicher Form oder in einer Form entwickelt seyn, welche unendliche Reihen in sich aufnimmt, wenn nur $\psi_{\mathfrak{x}}$ im Kalkul

zuläßig ist, also auch entweder eine endliche Form ist, oder zuläßige (allgemeine, oder numerische aber dann convergente) Reihen enthält. — Setzt man nun in diesem Integral $\psi_x - \psi_{\mathfrak{x}}$, statt x irgend etwas anderes z. B. $\mathfrak{X}$, so erhält man $\psi_{\mathfrak{X}} - \psi_{\mathfrak{x}}$ und diesen Ausdruck nennen wir ein allgemein-bestimmtes Integral und wir bezeichnen es durch $\int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} f_x \cdot dx$, so daß man hat

$$\text{II.} \quad \int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} f_x \cdot dx = \psi_{\mathfrak{X}} - \psi_{\mathfrak{x}},$$

wenn $\partial \psi_x = f_x$, d. h. wenn $\int f_x \cdot dx = \psi_x$ gefunden worden ist, — während wir uns $\mathfrak{X}$ eben so allgemein denken als $\mathfrak{x}$; so daß $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{x}$, welche man die Grenzen des Integrals nennt, als bloße Träger der Operationszeichen gedacht werden, welche eben so wohl noch jede reelle Zahl, wie auch jede imaginäre, vorstellen können*).

§. 17.

Aus den Formeln I. — IV. des §. 9. nehmen wir nun sogleich ab:

$$\text{I.} \quad \int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} (A \cdot \varphi_x) \cdot dx = A \cdot \int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} \varphi_x \cdot dx;$$

$$\text{II.} \quad \int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} (\varphi_x \pm \psi_x) \cdot dx = \int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} \varphi_x \cdot dx \pm \int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} \psi_x \cdot dx;$$

---

*) Von diesen allgemein-bestimmten Integralen unterscheiden wir in der Folge sorgfältigst die numerisch-bestimmten, welche letztere wir dann auch durch ein besonderes Zeichen $\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_x . dx$ hervorheben werden.

III. Wird $\int \psi \cdot dx = f_x$ gesetzt, so daß f_x ein besonderes Integral von ψ nach x, also $\partial f_x = \psi_x$ ist, so ist

$$\int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} (\varphi_x \cdot \psi_x) \cdot dx = (\varphi_{\mathfrak{X}} \cdot f_{\mathfrak{X}} - \varphi_{\mathfrak{x}} \cdot f_{\mathfrak{x}}) - \int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} (\partial \varphi_x \cdot f_x) \cdot dx.$$

Ist endlich zwischen x und z eine Gleichung $L = o$ gegeben; bedeuten dabei $\mathfrak{z}$ und Z die Werthe von z, welche aus dieser Gleichung $L = o$ bezüglich für die Werthe $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ von x hervorgehen; und versteht man unter $f_{(z)}$ das, was aus f_x hervorgeht, wenn statt x die aus $L = o$ für x hervorgehende Funktion x von z gesetzt wird, so ist allemal

IV. $$\int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} f_x \cdot dx = \int_{Z \div \mathfrak{z}} (f_{(z)} \cdot \partial x_z) \cdot dz,$$

wie auch $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{x}$, Z und $\mathfrak{z}$ in allen 4 Formeln beschaffen seyn mögen, reell oder imaginär, wenn nur, im Falle mehrdeutige Ausdrücke entstehen, die Mehrdeutigkeit so berücksichtigt wird, wie solches in der „Ersten Abhandlung" bei Gelegenheit der mehrdeutigen Wurzeln und der unendlich-viel-deutigen Potenzen und Logarithmen vorgeschrieben werden mußte.

In dieser Formel IV. geben nämlich beide allgemeine Integrale links und rechts (nach §. 9. IV.) eine und dieselbe Funktion von x, z. B. ψ_x, nur daß die auf der rechten Seite unter der Form $\psi_{(z)}$ erscheint; weil aber $\psi_{\mathfrak{X}} = \psi_{(Z)}$ und $\psi_{\mathfrak{x}} = \psi_{(\mathfrak{z})}$ ist, so folgt auch, daß

$$\psi_{\mathfrak{X}} - \psi_{\mathfrak{x}} = \psi_{(Z)} - \psi_{(\mathfrak{z})}$$

ist.

§. 18.

Es ist nun zunächst, sobald x und z von einander unabhängig sind,

$$1)\ \partial\left(\int_{\mathfrak{X}\div\mathfrak{x}} f_{x,z}\cdot dx\right)_z = \int_{\mathfrak{X}\div\mathfrak{x}} (\partial f_z)\cdot dx$$

$$2)\ \int_{Z\div\mathfrak{z}}\left(\int_{\mathfrak{X}\div\mathfrak{x}} f_{x,z}\cdot dx\right)\cdot dz = \int_{\mathfrak{X}\div\mathfrak{x}}\left(\int_{Z\div\mathfrak{z}} f_{x,z}\cdot dz\right)\cdot dx;$$

wenn nur in beiden Formeln $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{x}$ nicht mehr Funktionen von z sind, und wenn in 2. auch Z und $\mathfrak{z}$ nicht mehr Funktionen von x sind; — d. h.

„es ist, wenn x und z von einander ganz unabhängig „sind, ganz einerlei in welcher Ordnung man nach x und z „differenziirt oder integrirt, so lange nur die Grenzwerthe „des Veränderlichen, nach welchem integrirt wird, nicht mehr „Funktionen desjenigen Veränderlichen sind, nach welchem „die nun folgende Differentiation oder Integration statt fin„den soll.“

Sind aber die Grenzwerthe $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ selber noch Funktionen von z, so hat man statt der Formel 1. jetzt die nachstehende:

$$3)\ \partial\left(\int_{\mathfrak{X}\div\mathfrak{x}} f_{x,z}\cdot dx\right)_{(z)} = \int_{\mathfrak{X}\div\mathfrak{x}} (\partial f_z)\cdot dx + f_{\mathfrak{X},z}\cdot\partial\mathfrak{X}_z - f_{\mathfrak{x},z}\cdot\partial\mathfrak{x}_z.$$

Diese Sätze gelten ohne alle Ausnahme, wie auch die Grenzen der Integrale beschaffen seyn mögen, allgemein oder numerisch und im letztern Falle reell oder imaginär; sie erfordern aber in ihrer Anwendung einige Rücksicht, auf welche die nächste Anmerkung aufmerksam macht. Zuvor die Beweise.

Ad 1. Es sey

$$\int f_{x,z}\cdot dx = \varphi_{x,z},$$

so ist

$$\int_{\mathfrak{X}\div\mathfrak{x}} f_{x,z}\cdot dx = \varphi_{\mathfrak{X},z} - \varphi_{\mathfrak{x},z},$$

also auch

$$1^1)\quad \partial\Big(\int_{\mathfrak{X}\div\mathfrak{x}} f_{x,z}\cdot dx\Big)_{(z)} = \partial(\varphi_{\mathfrak{X},z})_{(z)} - \partial(\varphi_{\mathfrak{x},z})_{(z)},$$

wo die Klammern um z herum andeuten, daß die Differentiation nach allem z genommen werden soll, so daß diese Klammern überflüßig werden, so oft weder $\mathfrak{X}$ noch $\mathfrak{x}$ eine Funktion von z ist.

Sind nun $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{x}$ Funktionen von z oder nicht, so ist doch immer (nach §. 4. I.)

$$2^1)\quad \partial(\varphi_{\mathfrak{X},z})_{(z)} = \partial\varphi_{\mathfrak{X}}\cdot\partial\mathfrak{X}_z + \partial(\varphi_{\mathfrak{X},z})_z,$$

welche auch gilt, wenn überall $\mathfrak{x}$ statt $\mathfrak{X}$ gesetzt wird, wo jedoch $\partial\mathfrak{X}_z$ oder $\partial\mathfrak{x}_z$ der Null gleich ist, wenn $\mathfrak{X}$ oder $\mathfrak{x}$ keine Funktion von z (d. h. nach z konstant) seyn sollte.

Auf der andern Seite hat man

$$f = \partial\varphi_x, \quad \text{also} \quad \partial f_z = \partial^{1,1}\varphi_{x,z}$$

und

$$\int(\partial f_z)\cdot dx = \partial\varphi_z = \partial(\varphi_{x,z})_z;$$

folglich auch

$$3^1)\quad \int_{\mathfrak{X}\div\mathfrak{x}}(\partial f_z)\cdot dx = \partial(\varphi_{\mathfrak{X},z})_z - \partial(\varphi_{\mathfrak{x},z})_z.$$

Vergleicht man nun die Formeln 1^1) und 3^1) mit einander, so folgt die obige 1), weil, wenn $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{x}$ nach z konstant sind, dann

$$\partial(\varphi_{\mathfrak{X},z})_{(z)} = \partial(\varphi_{\mathfrak{X},z})_z \quad \text{und} \quad (\partial\varphi_{\mathfrak{x},z})_{(z)} = \partial(\varphi_{\mathfrak{x},z})_z$$

ist. — Aber eben so folgt aus der Vergleichung von 1^1) und 3^1) mit Zuziehung der 2^1) auch die Formel 3), in welcher noch $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{x}$ als Funktionen von z gedacht sind; in so ferne $\partial\varphi_x = f_{x,z}$, also $\partial\varphi_{\mathfrak{X}} = f_{\mathfrak{X},z}$ und $\partial\varphi_{\mathfrak{x}} = f_{\mathfrak{x},z}$ ist.

Ad 2. Man denke sich $\psi_{x,z}$ so, daß $\partial^{1,1}\psi_{x,z} = f$, also $\int f\cdot dx = \partial\psi_z$ und $\int f\cdot dz = \partial\psi_x$ ist, so findet sich sogleich jede der beiden Seiten der Gleichung 2)

$$=\psi_{\mathfrak{x},z}+\psi_{\mathfrak{r},\mathfrak{z}}-(\psi_{\mathfrak{x},\mathfrak{z}}+\psi_{\mathfrak{r},z}).$$

Anmerkung 1. Man muß aber folgende Bemerkungen hinzufügen:

a) Diese Beweise setzen voraus, daß wenn $F_{u,v}$ eine Funktion von u und v ist, die nach u differenzirt oder die nach u integrirt werden soll (zwischen zwei bestimmten Grenzwerthen u′ und u″ von u), — es ganz einerlei ist, ob man vor oder erst nach dem Geschäfte des Differenzirens oder Integrirens nach u, statt des andern Veränderlichen v einen bestimmten Werth 𝔳 setzt, weil v nach u konstant ist, also bei dem Differenziren und Integriren nach u, unter v jeder beliebige Werth gedacht werden kann.

b) So richtig dies im Allgemeinen auch ist, so schließt sich doch zuweilen der Fall davon aus, wo unter v ein solcher Werth 𝔳 gedacht wird, welcher dem $F_{u,v}$ eine ganz andere Form giebt, so daß man z. B., wenn statt v dieser bestimmte Werth 𝔳 vorher gesetzt worden, eine ganz andere Form nach u zu differenziren oder integriren findet, als wenn v stehen bleibt und unter v dieser bestimmte Werth 𝔳 nur gedacht wird.

Es sey z. B. $F_{u,v}=\frac{x\cdot\partial y_u - y\cdot\partial x_u}{x^2+y^2}$, wo x und y beliebige Funktionen von u und v vorstellen, so ist

$$\int F_{u,v}\cdot du = \frac{1}{Tg}\frac{y}{x}.$$

Denkt man sich nun unter y und ∂y_u solche Funktionen von u und v, daß beide $=0$ werden, so oft $v=\mathfrak{v}$ ist, denkt man sich z. B.

$$y=f_u\cdot(v-\mathfrak{v})^m,\quad \text{also}\quad \partial y_u=\partial f_u\cdot(v-\mathfrak{v})^m,$$

wo m beliebig ganz oder gebrochen, aber positiv gedacht ist,

so ist, wenn man zuerst $v = \mathfrak{v}$ setzt, $F_{u,v} = o$, also $\int F_{u,v} \cdot du = c$ und $\int\limits_{u'' \div u'} F_{u,v} \cdot du = o$. —

Läßt man aber Anfangs v noch unbestimmt stehen, so ergiebt sich, wenn zuletzt erst $\mathfrak{v}$ statt v gesetzt wird,

$$\int\limits_{u'' \div u'} F_{u,v} \cdot du = \frac{1}{Tg} o - \frac{1}{Tg} o$$
$$= m\pi - n\pi = (m - n)\pi = \mu\pi,$$

wo m und n und μ Null, aber auch jede positive, sowie jede negative ganze Zahl vorstellen (Einleitung Nr. 29. III.), so daß jetzt das Integral unendlich-viele Werthe hat, worunter auch derjenige ist, welcher $= o$ und welchen man auf dem erstern Wege ganz allein gefunden hat.

Nimmt man in demselben Beispiele, während y jede beliebige Funktion von u und v vorstellen mag,

$$x = f_u \cdot (v - \mathfrak{v})^m, \text{ also } \partial x_u = \partial f_u \cdot (v - \mathfrak{v})^m,$$

so zeigt sich ganz analoges.

c) Aus diesen Beispielen geht also hervor: daß, wenn man die allgemeinere Form des Ausdrucks zu früh aufgiebt, dann ein Endresultat sich ergeben kann, welches nicht mehr so allgemein ist, als dasjenige, welches erhalten wird, wenn man die allgemeinere Form bis zu allerletzt aufrecht erhält.

d) Geben aber die beiden Seiten der Gleichungen 1.—3. in solchen Ausnahmsfällen wirklich verschiedene Resultate, so ist doch das eine nur allgemeiner und das andere in selbigem enthalten, so daß die erhaltene Gleichung selbst in diesem Falle nicht als eine unrichtige, sondern nur als eine unvollständige (unvollkommene) Gleichung angesehen werden kann.

e) Endlich möge man wohl beachten, daß die hier erwähnten Ausnahmen nicht davon abhängen, daß etwa die zu integrirende Funktion (also das sogenannte Differential) innerhalb der Grenzwerthe, zwischen denen die Integrale genommen sind, ihre Stetigkeit unterbricht. Das, worauf wir hier zuletzt aufmerksam gemacht haben, ist von den Werthen der zu integrirenden Funktion für innerhalb der Grenzen des Integrals (im Falle solche reell seyn sollten) liegende Werthe der unabhängigen Veränderlichen, ganz unabhängig.

Um auch dies an einem Beispiele zu zeigen wollen wir

$$f_{x,z} = \frac{z^2-x^2}{(z^2+x^2)^2}$$

nehmen, und diese Funktion, welche für $z=x=o$ die Form $\frac{1}{o}$ annimmt, nach x und nach z jedesmal zwischen den Grenzen -1 und $+1$ integriren, und zwar zweimal, jedesmal in verschiedener Ordnung. — Zuerst findet man:

$$\int f \cdot dx = \frac{x}{z^2+x^2} \quad \text{und} \quad \int f \cdot dz = \frac{-z}{z^2+x^2}.$$

Für $\mathfrak{X}=Z=+1$ und $\mathfrak{x}=\mathfrak{z}=-1$ findet sich also

$$\text{A.} \int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} f \cdot dx = \frac{2}{1+z^2} \quad \text{und B.} \int_{Z \div \mathfrak{z}} f \cdot dz = -\frac{2}{1+x^2}.$$

Der Ausdruck in A. zur Rechten, nach z integrirt, giebt $2\frac{1}{Tg}z$; der Ausdruck in B. zur Rechten, nach x integrirt, giebt dagegen $-2\frac{1}{Tg}x$; daher findet sich (aus A.)

$$\text{C.} \int_{Z \div \mathfrak{z}} \left(\int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} f \cdot dx \right) dz = 2\left(\frac{1}{Tg}1 - \frac{1}{Tg}(-1) \right)$$

und (aus B.)

$$\text{D.} \int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} \left(\int_{Z \div \mathfrak{z}} f \cdot dz \right) \cdot dx = -2\left(\frac{1}{Tg}1 - \frac{1}{Tg}(-1) \right).$$

Beachtete man nun die Vieldeutigkeit der erhaltenen Ausdrücke nicht, so möchte man glauben, daß die Ausdrücke zur Rechten in C. und D. einander nicht gleich seyen, und dies Beispiel für ein solches halten, welches sich der, im Lehrsatze ausgesprochenen Wahrheit entzieht. In der That ist aber (nach Einleitung 29. III.)

$$\frac{1}{Tg}1 = n\pi + \tfrac{1}{4}\pi \quad \text{und} \quad \frac{1}{Tg}(-1) = n'\pi - \tfrac{1}{4}\pi,$$

also

$$2\left[\frac{1}{Tg}1 - \frac{1}{Tg}(-1)\right] = 2(n - n' + \tfrac{1}{2})\pi = \pm(2\mu+1)\pi,$$

wo n, n′ und μ sowohl Null als jede positive und jede negative ganze Zahl bedeuten; — und ganz denselben Ausdruck $\pm(2\mu+1)\pi$ giebt auch das andere Resultat

$$-2\left[\frac{1}{Tg}1 - \frac{1}{Tg}(-1)\right].^{*)}$$

Für die Auffindung dieses (unendlich-) vieldeutigen Ausdruckes war es also ganz einerlei, in welcher Ordnung die doppelte Integration auch immer vorgenommen wurde, obgleich die zu integrirende Funktion innerhalb der Grenzen der Integrale ihre Stetigkeit unterbricht.

Anmerkung 2. Es gründet sich auf die beiden ersten Sätze des vorstehenden Paragraphen noch eine, zuweilen sehr bequeme Integrations-Methode. Soll nämlich $\int F \cdot dx$ gefunden werden, während F außer x auch noch einen andern unbestimmten Buchstaben z. B. a enthält, so kann man diese

---

*) Ganz anders aber verhält sich die Sache, wenn von den numerisch-bestimmten Integralen, welche erst weiter unten vorkommen, die Rede ist, und wo namentlich der für letztere geltende analoge Satz gerade in diesem Beispiele eine Ausnahme erleidet.

Funktion F vorher erst nach a differenziiren (oder integriren), dann erst diese Funktion ∂F_a (oder $\int F\cdot da$) nach x integriren, zuletzt aber das Resultat $\int(\partial F_a)\cdot dx$ [oder $\int\left(\int F\cdot da\right)\cdot dx$] wiederum nach a (zwischen denselben Grenzen, welche $\int(\partial F_a)\cdot da =$ dem gegebenen F_a machen) integriren (oder differenziiren). Immer wird man dann $\int F\cdot dx$ gefunden haben.

Soll z. B. $\int x^a \cdot log\, x\cdot dx$ gefunden werden, so giebt die Integration von $x^a\cdot log\, x$ nach a, zunächst x^a, — dann die Integration nach x das Resultat $\frac{x^{a+1}}{a+1}$; wird nun dieses wieder nach a differenziirt, so findet sich

$$\int(x^a\cdot log\, x)\cdot dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}\cdot log\, x - \frac{x^{a+1}}{(a+1)^2}.$$

Man muß jedoch zuweilen das Integral selbst erst etwas umformen, ehe man nach a differenziirt oder integrirt. Soll z. B. $z = \int(a^x\cdot x)\cdot dx$ gefunden werden, so würde die Integration nach a geben $\frac{a^{x+1}}{x+1}\cdot x$; schreibt man aber das gesuchte Integral z erst so: $z = a\cdot\int(a^{x-1}\cdot x)\cdot dx$, und sucht man nun das letztere Integral $\int(a^{x-1}\cdot x)\cdot dx$ auf dem gedachten Wege zu finden, so giebt die Integration nach a jetzt bloß a^x; dieses nach x integrirt, giebt $\frac{a^x}{log\, a}$; wird nun dieses wieder nach a differenziirt so erhält man $\frac{x\cdot a^{x-1}}{log\, a} - \frac{a^{x-1}}{(log\, a)^2}$; woraus, wenn man noch mit a multiplicirt, $z = \frac{x\cdot a^x}{log\, a} - \frac{a^x}{(log\, a)^2}$ hervorgeht.

Um auch ein Beispiel zu geben, wo zuerst nach a differenzirt und zuletzt dann nach a wieder integrirt wird, so sey $\int \frac{1}{Sin} \frac{x}{a} \cdot dx$ zu finden. — Differenziirt man die Funktion $\frac{1}{Sin} \frac{x}{a}$ zuerst nach a, so erhält man $-\frac{1}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; integrirt man dies nach x, so ergiebt sich $\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; und wird nun diese Funktion, nachdem man sie in $\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{x^2}{a \cdot \sqrt{a^2-x^2}}$ umgeformt hat, wiederum nach a integrirt, so erhält man (nachdem die Konstante C_x richtig bestimmt ist) $\sqrt{a^2-x^2} + x \cdot \frac{1}{Sin} \frac{x}{a}$, welches das gesuchte Integral $\int \frac{1}{Sin} \frac{x}{a} \cdot dx$ ist.

In allen diesen Beispielen würde jedoch die theilweise Integration nach x, ohne Zuziehung dieser Methode dieselben Resultate wenigstens eben so schnell geliefert haben.

§. 19.

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. etc. ganz allgemein, z. B. beliebige reelle oder imaginäre Zahlen, so ist allemal und ohne Ausnahme

4) $$\int_{\gamma \div \beta} f \cdot dx + \int_{\beta \div \alpha} f \cdot dx = \int_{\gamma \div \alpha} f \cdot dx;$$

5) $$\int_{\delta \div \gamma} f \cdot dx + \int_{\gamma \div \beta} f \cdot dx + \int_{\beta \div \alpha} f \cdot dx = \int_{\delta \div \alpha} f \cdot dx;$$

u. s. w. f.; ferner

6) $$\int_{\beta \div \alpha} f \cdot dx = -\int_{\alpha \div \beta} f \cdot dx,$$

wie unmittelbar aus der Definition (§. 16.) hervorgeht.

Und aus der Gleichung

$$\int f_x \cdot dx = \varphi_x + \int \psi_x \cdot dx$$

folgt allemal

7) $$\int\limits_{\beta \div \alpha} f_x \cdot dx = \varphi_\beta - \varphi_\alpha + \int\limits_{\beta \div \alpha} \psi_x \cdot dx;$$

und diese Wahrheit 7. ist besonders wichtig in allen Anwendungen der Formel §. 9. B. III., und daher auch in allen Reduktions-Formeln, so oft die Integrale zwischen Grenzen genommen werden.

§. 20.

I. In der Formel §. 17. IV. stecken unter anderen auch folgende besondere Fälle, nämlich:

1) $$\int\limits_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} f_x \cdot dx = \int\limits_{(\mathfrak{X} \pm a) \div (\mathfrak{x} \pm a)} f_{x \mp a} \cdot dx;$$

2) $$\int\limits_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} f_{x \pm a} \cdot dx = \int\limits_{(\mathfrak{X} \pm a) \div (\mathfrak{x} \pm a)} f_x \cdot dx;$$

3) $$\int\limits_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} f_x \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \int\limits_{a\mathfrak{X} \div a\mathfrak{x}} f_{x:a} \cdot dx;$$

4) $$\int\limits_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} f_x \cdot dx = a \cdot \int\limits_{\frac{\mathfrak{X}}{a} \div \frac{\mathfrak{x}}{a}} f_{ax} \cdot dx;$$

5) $$\int\limits_{\mathfrak{X} \div 0} f_x \cdot dx = \int\limits_{\mathfrak{X} \div 0} f_{\mathfrak{X} - x} \cdot dx;$$

6) $$\int\limits_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} f_x \cdot dx = \int\limits_{(\mathfrak{X} - \mathfrak{x}) \div 0} f_{\mathfrak{X} - x} \cdot dx;$$

7) $$\int\limits_{a \div (-\mathfrak{x})} f_x \cdot dx = \int\limits_{\mathfrak{x} \div (-a)} f_{-x} \cdot dx,$$

wo zur Rechten überall x und dx statt bezüglich z und dz geschrieben worden, da es bei dem bestimmten Integral ganz

gleichgültig ist, welcher fremde Buchstabe den Veränderlichen vertritt, nach welchem integrirt wird. Dabei sind in allen diesen Gleichungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{X}$, a, u. s. w., ganz allgemein, bloße Träger der Operations-Zeichen, und können daher auch eben sowohl beliebig reell als auch beliebig imaginär gedacht werden.

II. Aus demselben Lehrsatze (§ 17. IV.) geht aber auch noch hervor:

$$\int_{\mathfrak{x}\div(-\mathfrak{x})} f_x\cdot dx = \int_{\mathfrak{x}\div 0} (f_x + f_{-x})\cdot dx.\text{*)}$$

III. Ist daher f_x eine solche Funktion von x, welche sich nicht ändert, wenn auch $-x$ statt x gesetzt wird, d. h. ist

$$f_x = f_{-x},$$

so ist allemal, wenn auch α ganz allgemein ist,

$$\int_{\alpha\div(-\alpha)} f_x\cdot dx = 2\int_{\alpha\div 0} f_x\cdot dx.$$

IV. Ist dagegen f_x eine solche Funktion von x, welche, wenn man $-x$ statt x setzt, in $-f_x$ übergeht, ist also

$$f_{-x} = -f_x, \quad \text{folglich} \quad f_x + f_{-x} = 0,$$

so ist allemal, wenn auch α ganz allgemein gedacht ist,

$$\int_{(+\alpha)\div(-\alpha)} f_x\cdot dx = 0.$$

Schluß-Anmerkung.

Alle diese Sätze von den allgemein-bestimmten Integralen gelten, wenn die Grenzen der Integrale ganz

---

*) Denn es ist (nach §. 19. Nr. 4.)

$$\int_{\mathfrak{x}\div(-\mathfrak{x})} f_x\cdot dx = \int_{\mathfrak{x}\div 0} f_x\cdot dx + \int_{0\div(-\mathfrak{x})} f_x\cdot dx;$$

das Weitere folgt dann aus der obigen Nr. 7.

allgemein, als bloße Träger der Operations-Zeichen gedacht werden, so daß sie zur Zeit noch ganz inhaltlos sind, und beliebig und unabhängig von einander, eben so gut noch jede reelle Zahl, wie jede imaginäre vorstellen können, so lange nur die in den Lehrsätzen selbst gemachten Bedingungen erfüllt sind.

Drittes Kapitel.

Uebergang der Formgleichungen in Zahlengleichungen. — Ueber den Gang der reellen Werthe einer Funktion. — Vom Unendlich-Großen und Unendlich-Kleinen. — Der Lagrange-Taylor'sche und der Lagrange-Maclaurin'sche Lehrsatz. Die Leibnitzische Differential-Rechnung.

Einleitung.

In den beiden vorhergehenden Kapiteln ist der allgemeine Theil der sogenannten Differential- und Integral-Rechnung behandelt, d. h. derjenige Theil, in welchem jeder vorkommende Buchstabe ganz allgemein, ein bloßer Träger der Operationen, also ganz inhaltlos ist; mithin der Theil, in welchem nie von groß oder klein, von größer oder kleiner, und also auch nie von unendlich-groß oder unendlich-klein die Rede ist. — Die unendlichen Reihen, welche der Taylor'sche, oder der allgemeinere Maclaurin'sche Lehrsatz einführt, sind allgemeine, d. h. solche, in denen der Buchstabe, nach dessen ganzen Potenzen die Reihe fortschreitet, ebenfalls ein bloßer Träger der Operations-Zeichen, d. h. ganz inhaltlos gedacht ist. —

Dieser allgemeine Theil bildet aber die Grundlage aller Anwendungen.

Will man jedoch Anwendungen dieser bisherigen allgemeinen Lehren zur Vergleichung der Größen, d. h. der benannten Zahlen, machen, so zeigt sich bald folgendes:

1) Es giebt ursprünglich bloß ganze benannte Zahlen.

2) Diese benannten Zahlen werden auf niederere Einheiten gebracht, wenn man sie (oder vielmehr ihre unbenannten Zahlen) mit der Verhältniß-Zahl multiplicirt.

3) Die benannten Zahlen werden umgekehrt auf höhere Einheiten gebracht, wenn man sie (oder vielmehr ihre unbenannten Zahlen) durch die Verhältniß-Zahl dividirt.

4) Dies letztere ist im Allgemeinen nicht möglich, wenn man nicht die gebrochene benannte Zahl $\frac{m}{n}E$ einführt als das m fache des n^{ten} Theils der Einheit E. —

5) Auf diese Weise hat man dann ganze und gebrochene benannte Zahlen, für welche sich die beiden Reduktionsregeln 2. und 3. strenge beweisen lassen. — Negative und imaginäre benannte Zahlen ließen sich auch einführen, gewähren aber durchaus keine Vortheile für die Vergleichung der Größen.

6) Mit benannten Zahlen kann nie „gerechnet" werden; im Gegentheil wird in jeder Aufgabe, welche Vergleichung der Größen (also der benannten Zahlen) zum Zwecke hat, aus den Bedingungen der Aufgabe eine Gleichung zwischen den unbenannten Zahlen (nachdem die Benennungen oder die Einheiten vorher festgestellt worden) gebildet, und diese letztere ist und bleibt dann Gegenstand

der „Rechnung“, auf welchen alle Gesetze der Analysis ihre Anwendung finden.

Also tritt zur Vergleichung der Größen keine neue „Rechnung“ ein, sondern die gesammte Vergleichung der Größen beruht auf den allgemeinen Lehren der mathematischen Analysis, wie solche von uns bisher besprochen worden sind.

Bei der Vergleichung der Größen gehen aber die allgemeinen Ausdrücke der mathematischen Analysis, in denen die Buchstaben bloße Träger der Operationszeichen, also ganz inhaltlos gedacht werden konnten, und auch so gedacht worden sind, in solche Ausdrücke über, welche aus bestimmten (ganzen) Zahlen mittelst angezeigter Operationen zusammengesetzt sind, und welche wir Ziffern-Ausdrücke nennen wollen; und in diesen Ziffern-Ausdrücken stellen dann die Buchstaben entweder wirkliche ganze Zahlen oder selbst schon solche Ziffern-Ausdrücke vor. — Jeder Ziffern-Ausdruck läßt sich aber mittelst der allgemeinen Lehren der Analysis allemal entweder in einen solchen umformen, den wir eine reelle Zahl nannten, oder doch auf die Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ bringen, wo p und q solche reelle Zahlen sind, welche letztere Form wir dann eine imaginäre Zahl nannten.

Jede Gleichung zwischen Ziffern-Ausdrücken sagt nichts weiter, als daß jeder der beiden gleichen Ausdrücke, d. h. jede der beiden Seiten der Gleichung nach den allgemeinen Lehren der Analysis in einen und denselben Ausdruck von der Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ umgeformt werden kann, der entweder reell ist (wenn $q=0$) oder imaginär. — Die Gleichung lehrt also, daß ihre beiden Seiten eine und dieselbe reelle oder imaginäre Zahl vorstellen.

Wenn übrigens nach allem Vorausgegangenen, auch reelle Zahlen nichts anders sind, als angezeigte Operationen, also

Ausdrücke oder Formen, — so ist es doch wegen der Anwendungen zur Vergleichung der Größen rathsam, schon in der Analysis, wo von Größen durchaus noch nicht die Rede seyn kann, die Begriffe größer und kleiner bei reellen Zahlen so einzuführen, wie wir solches in der „ersten Abhandlung" des „Geistes der mathematischen Analysis" §. 23. gethan haben, wonach, — wenn a und b beliebige solcher Formen sind, welche positive, negative, ganze oder gebrochene Zahlen oder Null genannt werden, — die Zahl a größer als b, und b kleiner als a heißt, so oft a—b positiv, also b—a negativ ist.

§. 21.

Eben so kann man dann bei den absoluten (positiven) Zahlen, den Begriff unendlich-groß und unendlich-klein einführen, und unter „unendlich-groß" jede (positive) Zahl verstehen, die immer größer noch gedacht werden soll, als jede noch so groß schon gedachte aber bestimmte Zahl, während dann unter unendlich-kleiner (positiver) Zahl, eine Zahl verstanden wird, welche immer noch kleiner gedacht werden soll, als jede noch so klein gedachte aber bestimmte (positive und gebrochene) Zahl *).

Ist k eine solche unendlich-kleine (positive) Zahl, so ist doch

$$k - o = k$$

also k — o positiv, also k>o, in dem obigen Sinne. Die

*) Die unendlich-große wie die unendlich-kleine Zahl ist nie im Seyn vorhanden, sondern immer nur im Werden begriffen. Die Existenz derselben kann aber, so lange wir eine Stetigkeit der Größen zulassen, nicht bezweifelt werden, wenn uns auch der Ziffern-Ausdruck fehlt, der dieselben im Seyn vorstellte.

unendlich-kleine (positive) Zahl ist also immer noch größer als die Null (in dem obigen Sinne) und, — nennen wir die reelle Zahl a um so mehr von der reellen Zahl b unterschieden, je größer a—b wird, — so ist die unendlich-kleine Zahl von der Null nur um ein Unendlich-Kleines unterschieden, und dies will man ausdrücken, wenn man sagt: die unendlich-kleine Zahl komme der Null so nahe als man nur immer will, oder sie komme ihr unendlich nahe.

Im Allgemeinen ist die unendlich-kleine Zahl der Null nie gleich, weil die erstere die divisive Form $\frac{1}{\infty}$ hat, wenn wir die unendlich-große Zahl durch ∞ bezeichnen die andere die subtraktive Form 1—1, und diese beiden Formen nach dem allgemeinen Begriffe der Gleichung nie einander gleich sind. — Bei allgemeinen Rechnungen, in denen man sich um die Bedeutung der einzelnen Theile nicht kümmert, darf also nicht nur nie o statt $\frac{1}{\infty}$ gesetzt werden, sondern (was namentlich die Analysten am ehesten sich erlauben) man darf auch nicht ∞ statt $\frac{1}{o}$ setzen, da letzterer Ausdruck allemal eine in der Rechnung unzuläßige Form anzeigt, und die Rechnung sogleich aufhören muß, sobald sich eine solche unzuläßige Form ergiebt.

Um so wichtiger werden aber nun die Lehrsätze der folgenden Paragraphen.

Anmerkung. Man muß also stets die unendlich-kleinen Zahlen, von den sehr kleinen eben so wie von der Null wohl unterscheiden. Was von den unendlich-kleinen Zahlen behauptet und erwiesen werden kann, gilt von den bloß sehr kleinen Zahlen durchaus nicht, und noch weniger von der Null. —

Endlich ist noch zu bemerken, daß nach der Definition der größern und kleinern reellen Zahl, jede positive Zahl größer als Null, jede negative Zahl kleiner als Null ist, und daß die negativen Zahlen desto kleiner werden, je größer ihre absoluten Glieder sind, so daß unter den reellen Zahlen, die Zahl $-\infty$ (die negativ unendlich-große Zahl) die kleinste ist. — In den vorstehenden Definitionen der unendlich-großen und der unendlich-kleinen Zahl, sind aber die negativen Zahlen jedesmal ausgeschlossen und nur die absoluten (positiven) Zahlen in's Auge gefaßt.

Dies gilt für alle folgenden Paragraphen, so daß, wenn auch die Ausdrücke negativ seyn sollten, in den Vergleichungen derselben hinsichtlich ihrer Größe, immer nur von ihren absoluten Gliedern die Rede ist, also abgesehen von dem ihnen vorstehenden (+ oder —) Zeichen.

§. 22.

Von diesen unendlich-kleinen Zahlen steht nun folgendes fest:

1) Wie sehr klein eine (gebrochene oder irrationale) Zahl z auch immer gedacht seyn mag, so liegen, wenn sie nur völlig bestimmt ist, zwischen ihr und der Null doch immer noch unendlich-viele andere Zahlen, alle von einander verschieden, aber alle größer als Null und kleiner noch als diese noch so kleine aber bestimmte Zahl z.

2) Ist $\varkappa$ unendlich-klein, so sind auch $p\varkappa$, $q\varkappa^2$, $r\varkappa^3$ etc. unendlich-klein, wenn nur p, q, r etc. nicht Null, sondern beliebig große reelle endliche, d. h. völlig bestimmte Zahlen sind. — Denn wäre $p\varkappa = z$ und endlich, so wäre $\varkappa = \frac{z}{p}$, also nicht unendlich-klein. —

3) Ist der Quotient $\frac{b}{a}$ unendlich-klein, so nennen wir „b unendlich-klein gegen a" und sagen dann auch „a sey unendlich-groß gegen b" (auch wenn a an sich selbst unendlich-klein z. B. wenn $b = px^2$, $a = qx$, also $\frac{b}{a} = \frac{p}{q}x$ seyn sollte, wo x unendlich-klein gedacht ist).

4) Sind m, p, q, r, s etc. etc. reelle endliche Zahlen aber nicht Null, und ist x unendlich-klein gedacht, so ist

px unendlich-klein gegen m; also m unendlich-groß gegen px
qx^2 „ „ „ px; „ px „ „ „ qx^2
rx^3 „ „ „ qx^2; „ qx^2 „ „ „ rx^3

u. s. w. f.; aber es ist auch, wenn μ und ν ganz oder gebrochen sind und $\mu < \nu$ ist, px^ν unendlich-klein gegen qx^μ; also qx^μ unendlich-groß gegen px^ν.

5) Man theilt daher die unendlich-kleinen Zahlen unter sich in Ordnungen, und rechnet qx^μ gegen x, zur μ^{ten} Ordnung, während x selbst dann zur ersten Ordnung gehört. Man rechnet ferner zwei Unendlich-Kleine a und b zu „einer und derselben Ordnung", wenn der Quotient $\frac{a}{b}$ einen endlichen Werth hat. — Mann kann dabei den Exponenten μ auch als eine gebrochene (absolute d. h. positive) Zahl sich denken.

6) Da der Werth der für $z \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}$ allemal konvergenten Reihe $p \cdot z^n + q \cdot z^{n+1} + r \cdot z^{n+2} + \cdots$ immer $< 2A \cdot z^n$ ist, wenn A den größesten der reellen Koefficienten p, q, r etc. etc. vorstellt, so ist die Reihe

$$p \cdot x^n + q \cdot x^{n+1} + r \cdot x^{n+2} + \cdots,$$

wo x unendlich-klein ist, allemal ein Unendlich-Kleines der n^{ten} Ordnung, so lange nur p nicht Null ist. Also

hat dieselbe Reihe allemal einen endlichen Werth, sobald noch überdies $n=o$ ist.

7) Das Analoge gilt offenbar von der Reihe

$$p\cdot x^{\mu}+q\cdot x^{\nu}+r\cdot x^{\varrho}+\cdots,$$

welche unendlich-klein von der μ^{ten} Ordnung ist, so oft μ, ν, ϱ etc. etc. beliebig ganz oder gebrochen, aber positiv und (der Reihe nach) wachsend gedacht werden.

§. 23.

I. Ist unter den Voraussetzungen, daß x unendlich-klein ist und alle Koefficienten reell sind,

$$a+b\cdot x+c\cdot x^2+\cdots+p\cdot x^{n-1}+q\cdot x^n$$
$$=a_1+b_1\cdot x+c_1\cdot x^2+\cdots+p_1\cdot x^{n-1}+q_1\cdot x^n,$$

so sind nothwendig die Koefficienten der gleichnamigen Potenzen von x, in beiden Seiten der Gleichung einzeln einander gleich. Und dies gilt für jede noch so große Zahl n.

Denn wäre nicht $q=q_1$, so hätte man

$$(\mathfrak{C})\cdots\quad x^n=\frac{a_1-a}{q-q_1}+\frac{b_1-b}{q-q_1}x+\frac{c_1-c}{q-q_1}x^2+\cdots+\frac{p_1-p}{q-q_1}x^{n-1};$$

dann aber wäre x^n nicht unendlich-klein (nach §. 22. Nr. 6.), wenn nicht $a_1-a=o$ ist. Ist aber $a_1-a=o$, also $a=a_1$, dann ist auch

$$b+cx+\cdots+px^{n-2}+qx^{n-1}=b_1+c_1x+\cdots+p_1x^{n-2}+q_1x^{n-1}$$

also $$x^{n-1}=\frac{b_1-b}{q-q_1}+\frac{c_1-c}{q-q_1}x+\cdots+\frac{p_1-p}{q-q_1}x^{n-2},$$

und es würde wieder x^{n-1} nicht unendlich-klein seyn, wenn nicht $b_1=b$ wäre. — So aber kann man fortfahren und den Lehrsatz zu Ende beweisen, wie groß auch die Zahl n seyn mag.

II. Daraus folgt, daß wenn x unendlich-klein ist, und A, B, C, D etc. etc. als reelle Zahlen vorausgesetzt sind, von denen man jedoch weiß, daß

$$A+B\cdot x+C\cdot x^2+D\cdot x^3+\cdots=0$$

ist, dann nothwendig gefolgert werden kann, daß einzeln

$$A=0,\ B=0,\ C=0,\ D=0 \text{ etc. etc.}$$

seyn müsse.

III. Endlich sieht man auch leicht ein, daß die letzteren Gleichungen $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=0$ etc. etc. auch noch dann Statt finden müssen, wenn man

$$A+B\cdot x^m+C\cdot x^n+D\cdot x^p+E\cdot x^q+\cdots=0$$

hat, und die Exponenten m, n, p, q etc. alle positiv ganz oder gebrochen aber wachsend, wenn ferner x unendlich-klein und A, B, C, D, E etc. etc. reell vorausgesetzt sind.

IV. Diese Wahrheiten kann man auch so aussprechen: In jeder Gleichung, in welcher die Glieder nach den ganzen oder gebrochenen aber positiven Potenzen eines unendlich-kleinen x geordnet sind, und die übrigens lauter reelle Glieder hat, kann man immer alle Glieder, welche mit einer und derselben Potenz des unendlich-kleinen x afficirt sind, allein beibehalten, und alle übrigen, mit höhern oder niedrigern Potenzen des unendlich-kleinen x afficirten Glieder außer Acht lassen; immer hat man dann eine richtige Gleichung; nämlich eine der in II. oder III. erhaltenen Gleichungen $A=0$, oder $B=0$, oder $C=0$, oder $D=0$ oder etc. etc.

Namentlich kann man also aus jeder solchen Gleichung alle höhern Potenzen des unendlich-kleinen x außer Acht lassen, und die niedrigern bloß beibehalten; man hat dann z. B. statt der Gleichung

$$A+B\cdot x+C\cdot x^2+D\cdot x^3+E\cdot x^4=0$$

etwa bloß die Gleichung

$$A+B\cdot x+C\cdot x^2=0,$$

welche zwar nicht mehr so reichhaltig ist, weil sie nur die

3 Gleichungen A = o, B = o, C = o in sich schließt (während die andere auch noch D = o und E = o liefert), welche aber doch eine richtige Gleichung ist.

§. 23 b.

In jeder Zahlen-Gleichung (d. h. in jeder Gleichung, deren beide Seiten aus wirklichen Zahlen zusammengesetzt gedacht, also Ziffern-Ausdrücke sind, die eine und dieselbe reelle oder imaginäre Zahl vorstellen) kann man, wenn a reell und endlich, x dagegen unendlich-klein ist,

1) statt $a+x$ bloß schreiben a; aber auch

2) statt $a+x\cdot\sqrt{-1}$ bloß schreiben a; endlich auch

3) statt $x+a\cdot\sqrt{-1}$ bloß schreiben $a\cdot\sqrt{-1}$;

d. h. man kann statt x in diesen drei Fällen die Null setzen und man bekommt immer eine richtige Gleichung. Man leistet aber dann auf die Wohlthat des Rechnens mit völlig allgemeinen Ausdrücken Verzicht, und die etwa vorkommenden unendlichen Reihen müssen dann auch als numerische und konvergente gedacht werden. Dabei wird vorausgesetzt, daß, indem man o statt des unendlich-kleinen x setzt, keiner der Ausdrücke eine der in der Rechnung unzulässigen Formen annimmt.

Beweis. Denn unter der letztern Voraussetzung läßt (nach §. 8.) jeder der Ziffern-Ausdrücke, in denen das unendlich-kleine x vorkommt, nach ganzen oder gebrochenen aber positiven und steigenden Potenzen von x sich entwickeln, so daß der Ausdruck selbst die Form

$$P_0+P_1\cdot x^\mu+P_2\cdot x^\nu+P_3\cdot x^\varrho+\cdots$$
$$+\sqrt{-1}(Q_0+Q_1\cdot x^\mu+Q_2\cdot x^\nu+Q_3\cdot x^\varrho+\cdots)$$

annimmt. Die gegebene Gleichung zerfällt dann in die beiden Gleichungen

$$P_0+P_1\cdot\varkappa^{\mu}+P_2\cdot\varkappa^{\nu}+\cdots=P'_0+P'_1\cdot\varkappa^{\mu}+P'_2\cdot\varkappa^{\nu}+\cdots$$

und

$$Q_0+Q_1\cdot\varkappa^{\mu}+Q_2\cdot\varkappa^{\nu}+\cdots=Q'_0+Q'_1\cdot\varkappa^{\mu}+Q'_2\cdot\varkappa^{\nu}+\cdots.$$

Setzt man nun die Null statt des unendlich-kleinen $\varkappa$, so behält man in den beiden Gleichungen nur die Glieder bei, welche das Unendlich-Kleine gar nicht mehr enthalten; und die so entstehenden Gleichungen müssen daher (nach dem vorhergehenden §. 23.) nothwendig richtige Gleichungen seyn.

Anmerkung. Den Inhalt des vorstehenden §. kann man auch in Worten so ausdrücken: „Das reelle Unendlich-Kleine verschwindet gegen das reelle oder „imaginäre Endliche" (1. 3.); und

„das imaginäre Unendlich-Kleine $\varkappa\cdot\sqrt{-1}$ verschwindet eben so gegen das reelle Endliche (2.), wie „es selbstredend auch gegen das imaginäre Endliche „$a\cdot\sqrt{-1}$ verschwinden muß (nach 1.)."

Jedoch setzt die Anwendung dieses Lehrsatzes voraus, daß man nicht mehr Form- sondern bereits Zahlen-Gleichungen haben wolle.

§. 24.

Man sagt: „Die Werthe einer Funktion f_x gehen für „alle stetig neben einander liegenden reellen Werthe von x*), „welche zwischen den reellen Werthen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ liegen (wo „$\mathfrak{X}>\mathfrak{x}$ d. h. $\mathfrak{X}-\mathfrak{x}$ positiv gedacht ist) stetig fort," wenn alle

*) Werthe von x nennen wir hier immer „stetig neben einander liegend", wenn sie reell sind, und der Unterschied je zweier, der Größe nach nächst auf einander folgender unendlich-klein d. h. immer kleiner noch gedacht wird, als jede noch so kleine aber bestimmte Zahl.

bestimmt und reell sind, d. h. wenn dazwischen keiner der Werthe von f_x weder imaginär wird, noch eine im Kalkul unzuläſſige Form ($\frac{1}{0}$, oder log o, etc. etc.) in sich aufnimmt.— Tritt aber eines dieser Ereignisse ein, für irgend einen reellen, zwischen x und X liegenden Werth von x, so sagt man: „Die Funktion f_x unterbreche ihre Stetigkeit an dieser „Stelle."

Z. B. die Funktionen $\sqrt{x-\alpha}$, $log(x-\alpha)$, $\frac{a}{x^2+b\cdot log(x-\alpha)}$, $(x-\alpha)^{-\frac{1}{2}}$, $Tg\frac{\pi x}{2\alpha}$, u. s. w. unterbrechen für $x=\alpha$ ihre Stetigkeit. Die ersteren vier gehen an dieser Stelle vom Reellen zum Imaginären über, oder umgekehrt vom Imaginären zum Reellen, und zwar die erste durch Null (o) hindurch, die zweite und dritte, indem sie den log o in sich aufnehmen, und die vierte nimmt für $x=\alpha$ die Form $\frac{1}{0}$ an; die fünfte endlich geht an dieser Stelle vom Positiven zum Negativen über, und zwar indem sie die Form $\frac{1}{0}$ in sich aufnimmt.

Wenn wir aber in der Folge nicht ausdrücklich das Gegentheil sagen, so setzen wir in diesem Kapitel immer stillschweigend als eine nothwendige und unerläßliche Bedingung voraus, daß die Funktionen, die wir für eine Reihe (z. B. von x bis zu X) stetig neben einander liegender reeller Werthe ihres Unabhängig-Veränderlichen betrachten, innerhalb dieser Grenzen (x und X) ihre Stetigkeit nicht unterbrechen.

Anmerkung 1. Wir sprechen hier absichtlich nicht von einer kontinuirlichen oder diskontinuirlichen **Funktion**,

da eine Funktion, so weit wir sie bis jetzt erklärt haben, eine bloße Reihenfolge angezeigter d. h. gedachter, mithin wirklicher Operationen, also eine bloße **Form** ist, welche einen Inbegriff von Merkmalen, also einen **Begriff** vorstellt. In dem besonderen Falle aber, wo wir den einzelnen Buchstaben, also auch dem x in der Funktion f_x, besondere und reelle Werthe beilegen, nimmt die Funktion f_x selbst besondere imaginäre oder reelle Werthe an, oder sie wird eine im Kalkul unzulässige Form, welche **zuweilen** einen unendlich-großen Werth andeutet. — Diese Werthe nun, wie sie zu stetig auf einander folgenden reellen Werthen von x sich ergeben, unterbrechen entweder **nie** oder doch **nur an gewissen Stellen** ihre Stetigkeit.

Anmerkung 2. Es entstehen nun sogleich folgende Fragen: Wenn die Werthe von x reell aber immer fort stetig wachsend gedacht werden, — woran erkennt man, wie lange die reellen Werthe einer Funktion f_x mit x zugleich wachsen, — wo sie anfangen wieder abzunehmen, — wie lange sie abnehmen, — wo die Uebergänge vom Wachsen zum Abnehmen (Maxima) oder vom Abnehmen zum Wachsen (Minima) sind; — wo die Stetigkeit der Funktion f_x unterbrochen wird; — wo $\frac{1}{0}$, $log\,0$ etc. etc. dazwischen tritt, oder wo sie vom Reellen zum Imaginären, und umgekehrt, oder vom Positiven zum Negativen übergehen, und umgekehrt?

Es ist dabei klar, daß die rellen Werthe von f_x mit denen von x zugleich wachsen, sobald, wenn h unendlich-klein und positiv gedacht wird, gleichzeitig $f_{x\pm h}-f_x \begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ ist, — daß diese Werthe von f_x abnehmen, wenn gleichzeitig $f_{x\pm h}-f_x \begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ ist, — daß da ein Uebergang vom

Wachsen zum Abnehmen (d. h. ein Maximum) ist, wo $f_{x\pm h}-f_x$ beide negativ sind, — daß dagegen da ein Uebergang vom Abnehmen zum Wachsen (d. h. ein Minimum) Stattfindet, wo $f_{x\pm h}-f_x$ beide positiv sind, — daß die Uebergänge vom Reellen zum Imaginären an den Stellen zu suchen sind, wo ein Radikand oder ein Logarithmand $\frac{1}{o}$ oder o wird; daß endlich die Unterbrechungen der Stetigkeit überhaupt gefunden werden, wenn man Divisoren, Dignanden, Radikanden oder Logarithmanden der Null gleich setzt, und aus diesen Gleichungen die zugehörigen Werthe von x findet.

Um aber die Unterschiede zwischen $f_{x\pm h}$ und f_x beurtheilen zu können, für ein unendlich-kleines h, — dazu ist es nöthig, den Ausdruck $f_{x\pm h}$ so, wie dies der Taylor'sche Lehrsatz mit sich bringt, umzuformen. Weil jedoch diese Untersuchungen nicht mehr so ganz allgemein sind, so können, da x in unseren jetzigen Fragen alle reellen Werthe von $-\infty$ durch o hindurch bis zu $+\infty$ durchläuft, auch Werthe von x vorkommen, für welche ∂f_x, oder $\partial^2 f_x$, oder einer der folgenden Koefficienten der Taylor'schen Reihe eine in der Rechnung unzuläſsige Form ($\frac{1}{o}$, *log* o, etc etc.) annimmt, für welche also die Taylor'sche Reihe unbrauchbar wird.

Wir wissen jedoch bereits aus dem §. 8., daß selbst für einen solchen Ausnahmswerth von x, für welchen die unendliche Taylor'sche Reihe nicht mehr brauchbar ist, um f_{x+h} auszudrücken, doch immer noch so viele Glieder der Taylor'schen Reihe als richtige Glieder der Entwickelung beibehalten werden müssen, als (Differential-) Koefficienten der Reihe, vom ersten an gerechnet, noch in der Rechnung zuläßige Formen annehmen (für diesen Werth von x), und daß nur dann erst andere Glieder (statt derjenigen, welche die Taylor'sche

Reihe liefert) mit gebrochenen Potenzen von h eintreten, wenn man bis zu dem Differential-Koefficienten gekommen ist, welcher zuerst die in der Rechnung unzulässige Form ($\frac{1}{0}$, oder *log* o, etc. etc.) in sich aufnimmt.

Es ist daher für die Anwendungen sehr wichtig, daß Lagrange gezeigt hat, wie, man mag die Taylor'sche Reihe abbrechen lassen, bei welchem ihrer Glieder man nur immer will, unter der Voraussetzung, daß man es überall nur mit reellen Werthen zu thun habe, allemal zwei Grenzen gefunden werden können, zwischen welchen die Summe aller übrigen Glieder der Entwicklung von f_{x+h}, es mögen solche bloß ganze oder auch gebrochene Potenzen von h in sich aufgenommen haben, der Größe nach liegen. Dieser Satz mag daher nun zunächst betrachtet werden.

§. 25.

So lange f_x und ∂f_x noch bestimmte endliche Werthe annehmen, ist (nach §. 8.)

$$\frac{f_{x+h}-f_x}{h}=\partial f_x+B\cdot h^{\mu}+\cdots,$$

wo μ entweder ganz oder gebrochen, aber >1 ist. Daraus folgt nicht bloß, daß der Quotient zur Linken für h=o dem Differential-Koefficienten ∂f_x gleich wird, sondern auch, daß der Werth desselben Quotienten für ein unendlich-kleines h von dem Werthe des Differential-Koefficienten ∂f_x nur unendlich-wenig (um ein unendlich-kleines der μ^{ten} Ordnung) verschieden ist. Ist daher K um noch so wenig kleiner als der kleinste, und G um noch so wenig größer als der größeste aller Werthe, welche ∂f_x für alle Werthe von x annimmt, die $=\mathfrak{x}$ oder $=\mathfrak{X}$ sind oder zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ liegen, so folgt, daß man allemal, wenn $\varkappa$ unendlich-klein ist und x und $x+\varkappa$

zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ liegen, oder wenn $x=\mathfrak{x}$, oder auch wenn $x+\varkappa=\mathfrak{X}$ seyn sollte, haben wird

$$\frac{f_{x+\varkappa}-f_x}{\varkappa} > K, \text{ aber } < G.$$

Denkt man sich nun hier statt x nach und nach $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}+\varkappa$, $\mathfrak{x}+2\varkappa$, $\mathfrak{x}+3\varkappa$, ... $\mathfrak{x}+(n-1)\varkappa$ gesetzt, während $n\varkappa=\mathfrak{X}-\mathfrak{x}$ gedacht wird; denkt man sich nachgehends alle diese Gleichungen zu einander addirt und dann die beiden Resultate d. h. die beiden Seiten der neuen Gleichung durch n dividirt, so erhält man

$$\frac{f_{\mathfrak{X}}-f_{\mathfrak{x}}}{\mathfrak{X}-\mathfrak{x}} > K, \text{ aber } < G.$$

Also ist der Quotient links ein Mittelwerth zwischen K und G, der durch $\partial f_{\mathfrak{x}+\vartheta.(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})}$ ausgedrückt werden kann, wenn ϑ unbekannt, aber entweder $=0$ oder $=1$, oder zwischen 0 und 1 liegend gedacht wird; d. h. es ist

$$\frac{f_{\mathfrak{X}}-f_{\mathfrak{x}}}{\mathfrak{X}-\mathfrak{x}} = \partial f_{\mathfrak{x}+\vartheta(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})}$$

oder, wenn $\mathfrak{X}-\mathfrak{x}=h$ gesetzt wird,

$$\text{I.} \quad f_{\mathfrak{x}+h} = f_{\mathfrak{x}} + \partial f_{\mathfrak{x}+\vartheta h}\cdot h.$$

§. 26.

Um von diesem Satze eine Anwendung zu machen, denke man sich $\mathfrak{X}-\mathfrak{x}$ unendlich-klein, so ist doch $\vartheta(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})$ nicht größer als $\mathfrak{X}-\mathfrak{x}$, während $\mathfrak{x}+\vartheta(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})$ weder $<\mathfrak{x}$ noch $>\mathfrak{X}$ ist. Daraus folgt:

1) So lange ∂f_x für Werthe von x, welche nicht $<\mathfrak{x}$ und nicht $>\mathfrak{X}$ sind, $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist, so lange ist $f_{\mathfrak{X}} \gtrless f_{\mathfrak{x}}$, d. h. so lange ist die Funktion f_x von $x=\mathfrak{x}$ an bis zu $x=\mathfrak{X}$ im $\left\{\begin{matrix}\text{Wachsen}\\ \text{Abnehmen}\end{matrix}\right\}$ begriffen, wenn nur $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ unendlich nahe an einander gedacht worden sind.

2) Ist $\mathfrak{X}' < \mathfrak{x}$, sind aber beide unendlich nahe aneinander, und ist dabei $\partial f_x \begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ für die Werthe von x, welche nicht $< \mathfrak{X}'$ und nicht $> \mathfrak{x}$ sind, so ist f_x von $x = \mathfrak{X}'$ an bis zu $x = \mathfrak{x}$ hin im $\begin{Bmatrix}\text{Wachsen}\\ \text{Abnehmen}\end{Bmatrix}$ begriffen.

3) Ist daher $\partial f_{\mathfrak{x}} \begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ aber endlich, so ist für Werthe von x, die unendlich nahe an $\mathfrak{x}$ liegen, dabei aber größer und kleiner als $\mathfrak{x}$ sind, ∂f_x noch immer $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ da die Werthe der Funktion ∂f_x nur stetig sich ändern; also ist dann f_x von $x = \mathfrak{X}'$ an, durch $x = \mathfrak{x}$ hindurch, bis zu $x = \mathfrak{X}$ hin, immerfort im $\begin{Bmatrix}\text{Wachsen}\\ \text{Abnehmen}\end{Bmatrix}$ begriffen, wenn nur $\mathfrak{X}'$ und $\mathfrak{X}$ unendlich nahe an $\mathfrak{x}$ liegen.

4) Geht aber ∂f_x bei $x = \mathfrak{x}$ vom Positiven zum Negativen, oder vom Negativen zum Positiven über, so ist $f_{\mathfrak{x}}$ selbst ein Minimum im erstern Fall, ein Maximum im letztern. Gleichzeitig ist aber nothwendig $\partial f_x = o$ oder doch $\partial f_{\mathfrak{x}}$ eine im Kalkul unzuläßige Form ($\frac{1}{o}$ etc. etc.), weil sonst nicht ∂f_x unmittelbar vor $x = \mathfrak{x}$, und unmittelbar darauf vom Positiven zum Negativen, oder vom Negativen zum Positiven übergehen könnte.

Umgekehrt folgt aber nicht, daß wenn für $x = \mathfrak{x}$, $\partial f_x = o$ wird, oder eine in der Rechnung unzuläßige Form ($\frac{1}{o}$, *log* o, etc. etc.) in sich aufnimmt, dann dieser Werth $\mathfrak{x}$ von x, die Funktion f_x allemal zu einem Maximum oder Minimum machen müsse, da die Werthe von ∂f_x für die auf beiden Seiten von $\mathfrak{x}$ nächst anliegenden Werthe von x, doch noch beide positiv oder beide negativ seyn können.

§. 27.

Wenn man in der Anwendung auf die Vergleichung der stets reell vorausgesetzten Werthe einer Funktion f_x, für eine Reihe lauter reeller Werthe von x, statt f_{x+h} die Taylor'sche Reihe nimmt, aber nur bis zu dem Gliede $\partial^{n-1}f_x \cdot \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}$ hin, wenn aber für einen Werth $\mathfrak{x}$ von x, alle Glieder reell sind, so liegt das Ergänzungsglied, welches für denselben Werth $\mathfrak{x}$ von x, noch hinzukommen muß, um $f_{\mathfrak{x}+h}$ genau zu haben, allemal zwischen dem größten und kleinsten aller der Werthe, welche $\partial^n f_x \cdot \frac{h^n}{n!}$ annimmt, wenn statt x alle stetig neben einander liegenden Werthe gesetzt werden, die zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}+h$ liegen.

Man schreibt diesen Satz gewöhnlich so, daß man sagt, es sey

$$\text{II. } f_{\mathfrak{x}+h} = f_{\mathfrak{x}} + \partial f_{\mathfrak{x}} \cdot h + \partial^2 f_{\mathfrak{x}} \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots + \partial^{n-1} f_{\mathfrak{x}} \cdot \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$+ \partial^n f_{\mathfrak{x}+\vartheta h} \cdot \frac{h^n}{n!},$$

wo ϑ einen bestimmten, unbekannten Werth bedeutet, von dem man bloß weiß, daß er zwischen o und 1 liegt, während $\partial^n f_{\mathfrak{x}+\vartheta h}$ das bedeutet, was aus $\partial^n f_x$ hervorgeht, wenn $\mathfrak{x}+\vartheta h$ statt x gesetzt wird.

Dieser Satz heißt der Taylor'sche Lehrsatz mit dem Lagrange'schen Ergänzungsgliede; wir wollen ihn künftig mit dem Namen des Lagrange-Taylor'schen Lehrsatzes citiren. — Der Satz I. des §. 25. ist ein besonderer Fall davon (für n=1).

Man kann dieses Ergänzungsglied etwa auf nachstehende Weise finden. Zuerst bemerkt man, daß solches gleich ist der Differenz

1) $f_{x+h}-(f_x+\partial f_x\cdot h+\partial^2 f_x\cdot\frac{h^2}{2!}+\cdots+\partial^{n-1}f_x\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)!})\cdots(=F_h)$

die als eine Funktion von h durch F_h bezeichnet werden kann. Dieses Ergänzungsglied F_h hat also die Eigenschaft, daß sowohl F_h, als auch ∂F_h, $\partial^2 F_h$ etc. etc. bis zu $\partial^{n-1}F_h$ hin, für $h=o$ der Null gleich werden, während ins Besondere noch

2) $\partial^{n-1}F_h=\partial^{n-1}f_{x+h}-\partial^{n-1}f_x$ und 3) $\partial^n F_h=\partial^n f_{x+h}$

ist, wo $\partial^{n-1}f_{x+h}$, $\partial^n f_{x+h}$ das bedeuten, was aus $\partial^{n-1}f_x$, $\partial^n f_x$ hervorgeht, wenn $x+h$ statt x gesetzt wird. Es wird daher zwar noch $\partial^{n-1}F_h$, aber im Allgemeinen nicht mehr $\partial^n F_h$, für $h=o$ der Null gleich werden.

Setzt man nun

4) $x+h=z$, so daß $h=z-x$

wird, so geht F_h in F_{z-x} über, welcher letztere Ausdruck durch φ_z bezeichnet seyn mag, so daß

5) $F_h=\varphi_z$ und 6) $\partial^r F_h=\partial^r\varphi_z$

wird, weil $\partial z_h=1$ ist. Dann werden also

7) φ_z, $\partial\varphi_z$, $\partial^2\varphi_z$, $\cdots$ $\partial^{n-1}\varphi_z$ für $z=x$ d. h. für $h=o$ der Null gleich, während noch (aus 6., 2. und 3.)

8) $\partial^{n-1}\varphi_z=\partial^{n-1}f_{x+h}-\partial^{n-1}f_x$ und 9) $\partial^n\varphi_z=\partial^n f_{x+h}$

ist, so daß $\partial^n\varphi_z$ für $z=x$ d. h. für $h=o$, im Allgemeinen nicht nothwendig mehr der Null gleich wird. Also läßt sich annehmen, daß das so umgeformte und gesuchte Ergänzungsglied φ_z die Form $(z-x)^n\cdot\psi_z$ hat, wo ψ_z im Allgemeinen für $z=x$ nicht mehr der Null gleich wird, in keinem Falle aber für $z=x$ die Form $\frac{1}{o}$ annimmt, obgleich

$$\psi_z=\frac{\varphi_z}{(z-x)^n}$$

ist.

Dies bewegt uns eine Funktion ψ_z von der Form $\frac{M_z}{N_z}$ zu betrachten, wo der Nenner N_z von $z=x$ an bis zu $z=x+h$ hin immerfort wächst oder immerfort abnimmt, so daß ∂N_z zwischen $z=x$ und $z=x+h$ entweder immer positiv oder immer negativ ist, während wir uns unter M_z eine beliebige Funktion von z, also auch die vorher betrachteten Funktionen φ_z, $\partial\varphi_z$, $\partial^2\varphi_z$ etc. etc. denken können.

Sind nun A und B bezüglich nächst kleiner als der kleinste und nächst größer als der größeste aller Werthe, welche der Quotient $\frac{\partial M_z}{\partial N_z}$ für alle zwischen x und $x+h$ liegenden Werthe von z annimmt, so sind die Differenzen

$$\frac{\partial M_z}{\partial N_z} - A \quad \text{und} \quad B - \frac{\partial M_z}{\partial N_z}$$

beide zugleich positiv; folglich sind die Differenzen

$$\partial M_z - A \cdot \partial N_z \quad \text{und} \quad B \cdot \partial N_z - \partial M_z$$

beide zugleich positiv oder beide zugleich negativ für jeden zwischen x und $x+h$ liegenden Werth von z, je nachdem ∂N_z immer positiv oder immer negativ bleibt; also sind (nach §. 26.) die Integrale dieser Differenzen, nämlich

$$M_z - A \cdot N_z \quad \text{und} \quad B \cdot N_z - M_z$$

entweder beide mit den Werthen von z zugleich wachsend, oder sie nehmen beide zugleich fortwährend ab (während die Werthe von z immer fort wachsen). Also sind dieselben Integrale, wenn sie zwischen den Grenzwerthen x und $x+h$ von z, genommen werden, nämlich

$$(M_{x+h} - M_x) - A \cdot (N_{x+h} - N_x)$$

und

$$B \cdot (N_{x+h} - N_x) - (M_{x+h} - M_x)$$

beide zugleich positiv oder beide zugleich negativ; also liegt der Quotient

$$\frac{M_{x+h} - M_x}{N_{x+h} - N_x}$$

zwischen A und B, d. h. zwischen dem kleinsten und größesten Werth von $\frac{\partial M_z}{\partial N_z}$, unter allen den Werthen, die dieser Quotient für $z = x + \vartheta h$ hat, während ϑ nach und nach alle reellen Werthe zwischen o und 1 annimmt; also ist

$$10) \qquad \frac{M_{x+h} - M_x}{N_{x+h} - N_x} = \frac{\partial M_{x+\vartheta h}}{\partial N_{x+\vartheta h}},$$

wo ϑ ein völlig bestimmter zwischen o und 1 liegender aber unbekannt bleibender Werth ist.

Dies Resultat gilt für jede beliebige Funktion M_z, wenn nur N_z zwar ebenfalls willkührlich, aber innerhalb der Werthe x und $x+h$ von z, immer fort wachsend, oder immer fort abnehmend ist.

Setzen wir nun hier nach und nach statt M_z die Funktionen φ_z, $\partial\varphi_z$, $\partial^2\varphi_z$, $\partial^3\varphi_z$, $\cdots\partial^n\varphi_z$, gleichzeitig aber statt N_z bezüglich $(z-x)^n$ und dessen Differential-Koefficienten nach z, nämlich

$$n(z-x)^{n-1}, \; n^{2|-1}(z-x)^{n-2}, \; n^{3|-1}(z-x)^{n-3}, \cdots n!(z-x)^0,$$

so erhält man nach und nach, weil diese Funktionen alle für $z = x$ der Null gleich werden,

$$\frac{\varphi_{x+h}}{h^n} = \frac{\partial\varphi_{x+h_1}}{n \cdot h_1^{\,n-1}}, \text{ wo } h_1 = \vartheta h \leqq h,$$

$$\frac{\partial\varphi_{x+h_1}}{n \cdot h_1^{\,n-1}} = \frac{\partial^2\varphi_{x+h_2}}{n^{2|-1} h_2^{\,n-2}}, \text{ wo } h_2 = \vartheta h_1 \leqq h_1 \leqq h,$$

$$\frac{\partial^2\varphi_{x+h_2}}{n^{2|-1}h_2^{\,n-2}}=\frac{\partial^3\varphi_{x+h_3}}{n^{3|-1}h_3^{\,n-3}},\ \text{wo } h_3=\vartheta h_2 \leqq h_2 \leqq h_1 \leqq h,$$

u. s. f., zuletzt

$$\frac{\partial^{n-1}\varphi_{x+h_{n-1}}}{n^{n-1|-1}\cdot h_{n-1}}=\frac{\partial^n\varphi_{x+h_n}}{n!},\ \text{wo } h_n=\vartheta h_{n-1} \leqq h_{n-1} \cdots \leqq h.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber sogleich, wenn man ϑh statt h_n schreibt, wo ϑ zwischen o und 1 liegt,

$$11)\qquad \frac{\varphi_{x+h}}{h^n}=\frac{\partial^n\varphi_{x+\vartheta h}}{n!}$$

d. h.

$$12)\qquad \varphi_{x+h}=\partial^n\varphi_{x+\vartheta h}\cdot\frac{h^n}{n!};$$

und da φ_{x+h} (nach 5.) nichts anders als das obige Ergänzungsglied F_h, und $\partial^n\varphi_z$ für $z=x+h$, (nach 9.) $=\partial^n f_{x+h}$, also $\partial^n\varphi_{x+\vartheta h}=\partial^n f_{x+\vartheta h}$ ist, so ist der obige Lehrsatz erwiesen.

Man überzeugt sich bald, durch Wiederholung des vorstehenden Beweises, und wenn man der größern Anschaulichkeit wegen gerade und ungerade n von einander unterscheidet, daß derselbe Satz gilt, auch wenn h negativ ist, so daß $x+h<x$ wird.

In den Anwendungen dieses Lehrsatzes müssen aber für das gegebene x, die Werthe von f_x, ∂f_x, $\partial^2 f_x$, bis zu $\partial^{n-1}f_x$ hin, angebbare reelle Werthe seyn, und außerdem darf nicht $\partial^n f_x$ von $x=x$ an bis zu $x=x+h$ hin die Stetigkeit unterbrechen.

Setzt man in diesem Lagrange-Taylor'schen Lehrsatze $x=o$ und x statt h, so erhält man noch

$$\text{III.}\quad f_x=f_o+\partial f_o\cdot x+\partial^2 f_o\cdot\frac{x^2}{2!}+\cdots+\partial^{n-1}f_o\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\partial^n f_{\vartheta x}\cdot\frac{x^n}{n!},$$

wo ϑ unbekannt aber zwischen*) o und 1 liegt, so daß $\partial^n f_{\vartheta x}$ einen Werth bedeutet, der zwischen dem größten und kleinsten aller der Werthe liegt, welche $\partial^n f_x$ für alle Werthe von x, die zwischen o und x liegen, annimmt; wobei x eben so gut negativ als positiv (wie auch Null) seyn kann.

Setzt man aber in dem allgemeinen Satz II. des §. 27. α statt x, und $x-\alpha$ statt h, so erhält man

$$\text{IV.}\quad f_x = f_\alpha + \partial f_\alpha \cdot \frac{x-\alpha}{1} + \partial^2 f_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \partial^3 f_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^3}{3!}$$
$$+ \partial^{n-1} f_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} + \partial^n f_{\alpha+\vartheta(x-\alpha)} \cdot \frac{(x-\alpha)^n}{n!},$$

wo $x-\alpha$ eben so gut negativ als positiv (wie auch Null) seyn kann, während ϑ unbekannt ist, aber zwischen o und 1 liegt.

Jeden dieser beiden Sätze, von denen der letztere (für $\alpha=o$) den erstern in sich schließt, kann man den Lagrange-Maclaurin'schen Lehrsatz nennen.

In der Anwendung dieses letzteren Lehrsatzes müssen aber

$$f_x,\ \partial f_x,\ \partial^2 f_x,\ \cdots\ \partial^{n-2} f_x,\ \partial^{n-1} f_x$$

für x—α lauter reelle Werthe annehmen, während $\partial^n f_x$ für keinen der Werthe von x, die zwischen α und x liegen, seine Stetigkeit ändern darf.

Anmerkung. Setzt man übrigens in dem Lagrange-Taylor'schen Lehrsatze den Zuwachs h, den x erleidet, unendlich-klein, so zeigt sich der Zuwachs, den f_x erleidet, mit dem Zuwachs h unendlich-klein von derselben Ordnung (§. 22.),

*) Wenn hier steht, daß ϑ zwischen o und 1 liegt, so versteht man darunter, daß ϑ auch diese Grenzwerthe o oder 1 selbst annehmen kann.

so lange nicht $\partial f_x = o$ ist; und der Quotient $\frac{f_{x+h} - f_x}{(x+h)-x}$ dieser Zuwachse ist von ∂f_x nur um unendlich-wenig verschieden, so daß (nach §. 23. IV.) statt dieses Quotienten mit völliger Genauigkeit bloß ∂f_x in den Gleichungen gesetzt zu werden braucht, welche nur Unendlich-Kleine derselben Ordnung enthalten; eine Wahrheit, die nicht mehr gilt, so oft statt h nicht etwas Unendlich-Kleines, sondern etwas Bestimmtes, wenn auch noch so Kleines gesetzt wird; im letztern Falle gilt die Behauptung nur annähernd, und giebt desto genauere Resultate, je kleiner h gedacht ist.

§. 28.

Man kann nun aber auch mittelst dieses Lagrange-Maclaurin'schen Lehrsatzes, wenn $f_{x,y,z}$ eine Funktion mehrerer und beliebig vieler Veränderlichen x, y, z ist, welche unabhängig von einander beliebige Zuwachse h, k, l erleiden, den Zuwachs $f_{x+h,y+k,z+l} - f_{x,y,z}$ nach Potenzen und Produkten der Zuwachse h, k, l entwickeln und, wenn man die Glieder der $n-1^{ten}$ Dimension dieser Zuwachse genommen hat, unter der Voraussetzung, daß alles reell ist, noch ein Ergänzungsglied finden, oder vielmehr Grenzen finden, zwischen denen dieses Ergänzungsglied liegen muß.

Man setzt zu dem Ende ht, kt, lt statt h, k, l; betrachtet dann $f_{x+ht,y+kt,z+lt}$ als eine Funktion von t, welche durch φ_t bezeichnet seyn mag und nun nach Potenzen von t entwickelt wird, so daß man dann $\varphi_t = \varphi_0 + \partial\varphi_0 \cdot t + \partial^2\varphi_0 \cdot \frac{t^2}{2!}$ $+ \cdots + \partial^{n-1}\varphi_0 \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \partial^n \varphi_{\vartheta t} \cdot \frac{t^n}{n!}$ erhält. Nun ist aber $\partial\varphi_t = \partial f_{x+ht} \cdot h + \partial f_{y+kt} \cdot k + \partial f_{z+lt} \cdot l$, folglich

$\partial\varphi_0 = \partial f_x \cdot h + \partial f_y \cdot k + \partial f_z \cdot l$; eben so findet man $\partial^2\varphi_0$ u. s. w. f. — Zuletzt wird $t=1$ gesetzt.

Auf diese Weise bildet sich der Taylor'sche Lehrsatz für Funktionen von beliebig viel Veränderlichen des §. 6., aber mit einem, wenn auch unbestimmten, doch zwischen bestimmten Grenzen liegenden Ergänzungsgliede.

Setzt man aber $t=1$, $x=y=z=o$, und zuletzt x, y, z statt bezüglich h, k, l, so giebt dasselbe Verfahren auch den Maclaurin'schen Lehrsatz für Funktionen mehrerer Veränderlichen, mit den Ergänzungsgliedern.

Anmerkung. Wir können diese Gelegenheit nicht vorbeigehen lassen, unsre davon noch nicht unterrichteten Leser darauf aufmerksam zu machen, daß die in einigen französischen und auch in Euler's Schriften hie und da vorkommenden halb-konvergenten Reihen (d. h. unendliche Reihen, welche als die Entwicklung einer Funktion f_x für besondere Werthe von x, gefunden und dabei divergent sind, aber die merkwürdige Eigenschaft haben, daß die Summe ihrer ersten Glieder dem Werthe von f_x immer näher kommt, je mehr man solche Glieder nimmt, bis zu einem bestimmten Gliede hin, daß aber, wenn nun noch mehr Glieder der Reihe hinzugefügt werden, man sich von dem Werthe von f_x wiederum desto mehr entfernt, je mehr Glieder der Reihe genommen werden) allemal als Entwicklungen angesehen werden können, welche durch den Lagrange-Maclaurin'schen Lehrsatz hervorgebracht sind. Da dieser Satz nun für jede Zahl n von Gliedern, die man nimmt, allemal die Grenzen giebt, zwischen denen das Ergänzungsglied liegt, so wird man mit n Gliedern dem Werthe von f_x am nächsten kommen, wenn n so genommen wird, daß für diese Zahl n die Grenzen des Ergänzungsgliedes einander am nächsten rücken.

§. 29.

Jetzt erst kann die gesammte Leibnitzische Differential-Rechnung entweder in ihrer ursprünglichen Gestalt, oder in der Form der „Methode der Grenzen" (als eine Anwendung der allgemeinen Lehren des ersten Kapitels auf den Fall, wo reelle Werthe der Funktionen betrachtet und mit einander verglichen werden sollen) ihren Platz finden. — Der Taylor'sche Lehrsatz für Funktionen eines einzigen oder mehrerer Veränderlichen giebt nämlich sogleich die Zuwachse, welche Funktionen erleiden, wenn deren Veränderliche gegebene Zuwachse erfahren. Sind nun letztere unendlich-klein, so bilden die ersteren unendliche Reihen, welche in ihren verschiedenen Gliedern Unendlich-Kleine der verschiedenen Ordnungen enthalten, welche man ferner, wenn alles reell ist, abbrechen lassen kann, wo man will, z. B. bei den Gliedern der $n - 1^{ten}$ Ordnung, während dann noch ein Ergänzungsglied hinzutritt, welches unendlich-klein von der n^{ten} Ordnung ist. — Da nun (nach §. 23.) aus Gleichungen, welche Unendlich-Kleine verschiedener Ordnungen enthalten, immer richtige Gleichungen hervorgehen, sobald nur die Glieder beibehalten werden, welche Unendlich-Kleine von einerlei Ordnung enthalten, so braucht man von der Taylor'schen Reihe (für einen oder für mehrere unabhängige Veränderliche gedacht), wenn die gegebenen Zuwachse als Unendlich-Kleine der ersten Ordnung gedacht werden, auch nur die Glieder beizubehalten, welche unendlich-klein von der ersten Ordnung sind (vgl. Anmerkg. zu §. 27.). Daher hat man sogleich folgende Wahrheiten:

I. Ist f eine Funktion von x, und wächst letzteres um das unendlich-kleine dx, so wächst f um ein unendlich-kleines df, und letzteres berechnet sich aus der Gleichung

$$df = \partial f_x \cdot dx,$$

aus welcher Gleichung auch noch

$$\frac{df}{dx} = \partial f_x$$

hervorgeht *).

II. Ist f eine Funktion von x und y, und wachsen x und y gleichzeitig um die unendlich-kleinen dx und dy, so erleidet auch f einen unendlich-kleinen Zuwachs, der, wenn man will, wieder durch df bezeichnet werden kann, der aber jetzt ganz anders wie in I. ist, und (nach §. 6. IV.) aus der Gleichung

$$df = \partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy = df_x + df_y$$

berechnet wird, während noch einzeln

$$df_x = \partial f_x \cdot dx \quad \text{und} \quad df_y = \partial f_y \cdot dy$$

ist, wenn man unter df_x und df_y die unendlich-kleinen Theil-Zuwachse (Partial-Differentialien) versteht, welche f dann erleidet, wenn x, oder y (um bezüglich dx, oder dy) allein nur wächst.

III. Ist f eine Funktion von x, y und z, und wachsen letztere bezüglich um die unendlich-kleinen dx, dy und dz, so wächst auch f um ein unendlich-kleines df, welches aber jetzt wieder ein Glied mehr hat als kurz vorher, nämlich (nach §. 6. V.) aus der Gleichung

---

*) Die (stehenden) d, wenn wir uns hier ihrer bedienen, bedeuten also an sich nichts; sondern dx, df etc. etc. sind Zuwachse (unendlich-kleine), welche x, f etc. etc. erleiden. Dagegen ist allemal das (runde) ∂ ein Operations-Zeichen, welches z. B. in ∂f_x eine vorgeschriebene Folge von Operationen anzeigt, die mit dem f_x vorgenommen werden müssen, damit die unter ∂f_x zu verstehende Funktion von x (aus der Funktion f_x von x) hervorgeht. Dieser Unterschied zwischen d und ∂, der so höchst wesentlich ist, muß daher hier und in der Folge stets auf das Sorgfältigste beachtet werden.

$$df = \partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy + \partial f_z \cdot dz$$

berechnet wird, während noch einzeln

$$df_x = \partial f_x \cdot dx; \quad df_y = \partial f_y \cdot dy; \quad df_z = \partial f_z \cdot dz;$$

aber auch

$$df_{x,y} = \partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy; \quad df_{x,z} = \partial f_x \cdot dx + \partial f_z \cdot dz$$

und $$df_{y,z} = \partial f_y \cdot dy + \partial f_z \cdot dz$$

ist, wenn man z. B. unter $df_{y,z}$ den unendlich-kleinen Theilzuwachs versteht, welchen f dadurch erleidet, daß x nicht, sondern nur y und z um bezüglich dy und dz wachsen.

IV. U. s. w. f.*)

Es werden aber hier überall reelle Werthe vorausgesetzt.

§. 30.

In so ferne nun solche totale oder partielle Differentialien df, außer den unendlich-kleinen Faktoren dx, dy etc. etc. auch noch Funktionen von x, oder von x und y, oder von x und y und z enthalten, so können auch sie selbst wieder unendlich-kleine Zuwachse erleiden, wenn in ihnen x, oder x und y, etc. etc. abermals um dx, oder um dx und dy etc. etc. wachsend gedacht werden. Diese neuen Zuwachse werden Glieder enthalten, welche unendlich-klein von der 2ten

---

*) Daß in der „Differential-Rechnung" gewöhnlich auch die hier durch df_x, df_y, $df_{x,y}$ etc. etc. bezeichneten (Partial-) Differentialien schlechtweg durch df bezeichnet werden, so daß dasselbe Zeichen df in den verschiedenen Fällen eine ganz verschiedene Bedeutung hat, ist eine der Hauptursachen, wegen deren es Anfängern oft so sehr schwierig wird, sich in selbiger zurecht zu finden. — Daß man $\frac{df}{dx} \cdot dx$ statt df_x, und $\frac{df}{dy} \cdot dy$ statt df_y, u. s. w. schreibt, gewährt dem Anfänger zwar einigen, aber doch nur geringen Anhalt.

Ordnung sind, gegen welche alle die Unendlich-Kleinen der höhern Ordnung weggelassen werden (eben so wie kein Unendlich-Kleines einer niedrigern Ordnung darin bleibt).

U. s w. f. — U. s. w. f.

§. 31.

Von dem imaginären Unendlich-Kleinen und von der Vergleichung der imaginären unendlich-kleinen Zuwachse mit einander.

I. Betrachten wir den Ausdruck $\alpha+\beta\cdot\sqrt{-1}$, in welchem α und β beliebig reell gedacht sind, so läßt er sich allemal auf die Form

$$r\cdot(Cos\,\varphi+\sqrt{-1}\cdot Sin\,\varphi)$$

bringen, indem man r und φ so nimmt, daß

$$r=+\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\quad Cos\,\varphi=\frac{\alpha}{r},\quad Sin\,\varphi=\frac{\beta}{r},\ \text{also}\ Tg\,\varphi=\frac{\beta}{\alpha}$$

richtige Gleichungen werden. Wir nennen die positive Zahl r den **Model** des imaginären Ausdrucks $\alpha+\beta\cdot\sqrt{-1}$, während φ das **Argument** desselben genannt werden kann.

Zu gleicher Zeit wissen wir, μ mag positiv oder negativ, ganz oder gebrochen seyn, daß allemal

$$(\alpha+\beta\cdot\sqrt{-1})^{\mu}=r^{\mu}\cdot(Cos\,\mu\varphi+\sqrt{-1}\cdot Sin\,\mu\varphi)$$

ist, wo, bei einem gebrochenen μ, r^{μ} als eindeutig und positiv angesehen werden kann, während φ um jede beliebige **gerade** Anzahl von π größer oder kleiner genommen werden kann und muß, sobald man zur Rechten **alle** Werthe der μ^{ten} Potenz zur Linken ausgedrückt sehen will.

II. Sind nun in dem Ausdruck $\alpha+\beta\cdot\sqrt{-1}$ sowohl α als auch β Unendlich-Kleine einer und derselben Ordnung, so nennen wir diesen Ausdruck ein **imaginäres Unendlich-Kleines derselben Ordnung**.

Ist α der Null gleich, so nennen wir denselben Ausdruck, der jetzt bloß $\beta\cdot\sqrt{-1}$ ist, ein imaginäres Unendlich-Kleines derselben Ordnung, von welcher β ist. — Ist aber β der Null gleich, so ist das Unendlich-Kleine ein reelles.

Aus I. folgt:

1) Der Model r eines imaginären Unendlich-Kleinen $\alpha+\beta\cdot\sqrt{-1}$ irgend einer Ordnung ist allemal ebenfalls ein Unendlich-Kleines derselben Ordnung, aber ein reelles. — Das Argument φ dagegen hängt von dem Verhältniß (Quotienten) $\frac{\beta}{\alpha}$ der beiden reellen Unendlich-Kleinen α und β ab, und kann solches Argument alle Werthe haben von o bis 2π. Auch kann das Argument φ um eine beliebige gerade Anzahl von π größer oder kleiner genommen werden.

2) Die μ^{te} Potenz eines imaginären Unendlich-Kleinen der ersten Ordnung ist (nach I.) allemal ein imaginäres Unendlich-Kleines der μ^{ten} Ordnung.

3) Sind a, b, c, ⋯ p, q endliche reelle oder imaginäre Ausdrücke von der Form $P+Q\cdot\sqrt{-1}$; — ist ferner $\varkappa$ ein reelles oder imaginäres Unendlich-Kleines und hat man

$$(\odot)\cdots \quad a+b\varkappa+c\varkappa^2+\cdots+p\varkappa^{n-1}+q\varkappa^n=o,$$

so ist einzeln

$$a=o,\ b=o,\ c=o,\ \cdots\ p=o,\ q=o.$$

Denn bezeichnet man die Koefficienten a, b, c, ⋯ p, q so, daß der $(a+1)^{te}$ durch $P_a+Q_a\cdot\sqrt{-1}$ ausgedrückt wird, und denkt man sich $\varkappa$ in der Form $r\cdot Cos\,\varphi+\sqrt{-1}\cdot r\cdot Sin\,\varphi$, so besteht die Gleichung $\odot$ zur Linken aus lauter Gliedern von der Form

$$(P_a+Q_a\cdot\sqrt{-1})\cdot r^a\cdot(Cos\,a\varphi+\sqrt{-1}\cdot Sin\,a\varphi)$$

d. h. von der Form

$$r^a\cdot(P_a\cdot Cos\,a\varphi-Q_a\cdot Sin\,a\varphi)$$
$$+r^a\cdot(P_a\cdot Sin\,a\varphi+Q_a\cdot Cos\,a\varphi)\cdot\sqrt{-1},$$

während a nach und nach Null und alle ganzen Zahlen darstellt, von 1 bis zu n hin. Nun zerfällt die Gleichung (⊙) offenbar zunächst in zwei Gleichungen; nämlich es ist die Summe der reellen Theile für sich der Null gleich und auch die Summe der imaginären für sich; d. h. es ist

$$P_0+(P_1\cdot Cos\,\varphi-Q_1\cdot Sin\,\varphi)\cdot r+(P_2\cdot Cos2\varphi-Q_2\cdot Sin2\varphi)\cdot r^2+\cdots$$
$$+(P_n\cdot Cos\,n\varphi-Q_n\cdot Sin\,n\varphi)\cdot r^n=o.$$

und

$$Q_0+(P_1\cdot Sin\,\varphi+Q_1\cdot Cos\,\varphi)\cdot r+(P_2\cdot Sin2\varphi+Q_2\cdot Cos2\varphi)\cdot r^2+\cdots$$
$$+(P_n\cdot Sin\,n\varphi+Q_n\cdot Cos\,n\varphi)\cdot r^n=o$$

Daraus folgt aber, weil r unendlich-klein reell und auch die Koefficienten reell sind (nach §. 23. II.)

$$P_a\cdot Cos\,a\varphi-Q_a\cdot Sin\,a\varphi=o$$

und $$P_a\cdot Sin\,a\varphi+Q_a\cdot Cos\,a\varphi=o,$$

woraus, da $Cos\,a\varphi$ und $Sin\,a\varphi$ nie zugleich Null sind, $P_a=o$ und $Q_a=o$, also auch $P_a+Q_a\cdot\sqrt{-1}=o$ hervorgeht.

4) Daraus folgt noch, daß wenn zwei solche Reihen

$$a+bx+cx^2+\cdots+px^{n-1}+qx^n$$

und $$a_1+b_1x+c_1x^2+\cdots+p_1x^{n-1}+q_1x^n$$

unter den in 3) gemachten Voraussetzungen einander gleich sind, dann die einzelnen Koefficienten der gleichnamigen Potenzen des imaginären Unendlich-Kleinen bezüglich einander gleich seyn müssen.

5) Und zwar gelten diese beiden Sätze 3) und 4) nach §. 23. III. auch dann noch, wenn die Reihen nach gebrochenen Potenzen des Unendlich-Kleinen fortlaufen.

6) Auch der Satz IV. des §. 23. kann auf die jetzigen Voraussetzungen ausgedehnt werden.

III. Daraus folgt aber noch, daß wenn man y als eine Funktion von x hat, etwa $y = f_x$, und wenn noch der zu $x+dx$ gehörige Werth von y durch $y+dy$ bezeichnet wird, und wenn unter dieser Voraussetzung dx und dy, auch wenn sie imaginär seyn sollten, die zusammengehörigen unendlich-kleinen Zuwachse der Werthe x und y genannt werden, dann alle Bestimmungen des §. 29. über die zusammengehörigen und zu gleicher Zeit unendlich-kleinen Zuwachse unbedingt noch gelten und in allen Anwendungen allemal zu richtigen Resultaten führen müssen, auch wenn diese unendlich-kleinen Zuwachse (Differentialien) alle oder zum Theil imaginäre seyn sollten, während auch der gedachte Werth von x etc. etc. reell oder imaginär seyn kann, jedoch allemal von der Form $P+Q\cdot\sqrt{-1}$ vorausgesetzt wird.

Namentlich gilt auch alles was im §. 29. über die Vergleichung der zusammengehörigen Differentialien bei Funktionen zweier und beliebig vieler Veränderlichen gesagt sich findet, wenn man nur den Begriff des Zuwachses so nimmt, wie hier beschrieben, und wie man ihn längst schon genommen hat, so oft von negativen Zuwachsen die Rede gewesen ist.

Auch was im §. 30. über zweite und höhere Differentialien gesagt sich findet, gilt, diese Differentialien mögen reell oder imaginär gedacht werden.

IV. Also gilt unter den hier gemachten Voraussetzungen die gesammte Leibnitzische Differential-Rechnung auch dann noch, wenn die Werthe aller Veränderlichen, und die unendlich-kleinen Zuwachse (Differentialien) beliebig reell oder imaginär, aber jedesmal von der Form $P+Q\cdot\sqrt{-1}$ sind.

Anmerkung. Wir machen noch einmal darauf aufmerksam, daß, es mag x und dx reell oder imaginär gedacht werden, wenn $y = f_x$ ist, allemal

$$dy = \partial f_x \cdot dx + \partial^2 f_x \cdot \frac{(dx)^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{(dx)^3}{3!} + \cdots$$

genommen werden muß. Sowie aber dx, reell oder imaginär, unendlich-klein ist, so nützt es nichts, die nach $\partial f_x \cdot dx$ noch folgenden Glieder der Taylor'schen Reihe beizubehalten, weil in allen Gleichungen doch immer die Glieder allein eine Gleichung bilden, welche unendlich-klein von einer und derselben Ordnung sind (nach II. 4. und §. 23. I.), weil also da, wo unendlich-kleine dx der ersten Ordnung einmal vorkommen, auch die Glieder der ersten Ordnung allein eine Gleichung bilden.

Auf diese Weise sieht man sehr deutlich die Leibnitzische Differential-Rechnung in einem noch viel weiteren Umfange gerechtfertigt, als Leibnitz selbst sie hingestellt hat.

Viertes Kapitel.

Von den numerisch-bestimmten Integralen.

§. 32.

Es sey jetzt wiederum eine Zeit lang nur von reellen Werthen die Rede.

Denkt man sich f als ein besonderes Integral von φ nach x, so daß

$$\int \varphi \cdot dx = f,\quad \partial f_x = \varphi \text{ und } df = \varphi_x \cdot dx$$

ist, wenn df und dx zusammengehörige unendlich-kleine Zuwachse von f und x vorstellen, — und denkt man sich in

dem Ausdrucke $\varphi_x \cdot dx$ (des unendlich-kleinen Zuwachses df, den die Funktion f_x erleidet, wenn x um dx wächst) — statt x nach und nach alle, um das unendlich-kleine und jedesmal positiv gedachte dx, von $x = \mathfrak{x}$ an bis zu $x = \mathfrak{X}$ hin stetig wachsende Werthe gesetzt, so hat man alle unendlich-kleinen und reell gedachten Zuwachse df, um welche f nach und nach gewachsen ist, um von $f_{\mathfrak{x}}$ an bis zu $f_{\mathfrak{X}}$ hin zu gelangen. Summirt (addirt) man daher alle diese Werthe von $\varphi_x \cdot dx$ (von $\varphi_{\mathfrak{x}} \cdot dx$ an bis zu $\varphi_{\mathfrak{X}-dx} \cdot dx$ hin), so hat man den Gesammtzuwachs von f und zwar von $f_{\mathfrak{x}}$ an bis zu $f_{\mathfrak{X}}$ hin, d. h. die Summe aller dieser Werthe von $\varphi_x \cdot dx$ ist der Differenz $f_{\mathfrak{X}} - f_{\mathfrak{x}}$ gleich, d. h. dem gleich, was im §. 16. durch $\int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} \varphi_x \cdot dx$ bezeichnet, und allgemein-bestimmtes Integral genannt worden ist. Dabei sind aber $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ reell gedacht, und $\mathfrak{x} < \mathfrak{X}$ d. h. $\mathfrak{X} - \mathfrak{x}$ positiv.

Bezeichnet man diese Summe aller Werthe von $\varphi_x \cdot dx$ zwischen $x = \mathfrak{x}$ und $x = \mathfrak{X}$ nach Fourier durch $\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} \varphi_x \cdot dx$, so kann man die eben gefundene Wahrheit durch folgende Gleichung aussprechen:

$$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} \varphi_x \cdot dx = \int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} \varphi_x \cdot dx, \quad \text{oder} \quad \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} \varphi_x \cdot dx = f_{\mathfrak{X}} - f_{\mathfrak{x}}.$$

Wir nennen von nun an das Zeichen $\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} \varphi_x \cdot dx$, welches die Summe aller $\varphi_x \cdot dx$ vorstellt, ein numerisch-bestimmtes Integral, um es von dem allgemein-bestimmten Integral $\int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} \varphi_x \cdot dx$ zu unterscheiden, welches letz-

tere die allgemeine Rechnungs-Vorschrift enthält, wie erstere

Summe $\int\limits_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} \varphi_x \cdot dx$ bestimmt werden kann.

Während also das allgemein-bestimmte Integral $\int\limits_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} \varphi_x \cdot dx$ eine Differenz zweier Werthe eines und desselben besonderen Integrals f_x ist, ist das numerisch-bestimmte Integral $\int\limits_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} \varphi_x \cdot dx$, nach der so eben gegebenen Definition, eine Summe unendlich-vieler unendlich-kleiner reeller Werthe, die alle durch das Produkt $\varphi_x \cdot dx$ vorgestellt sind, und die alle aus $\varphi_x \cdot dx$ hervorgehen, wenn man statt x nach und nach alle, um das unendlich-kleine dx von einander verschiedene, also alle stetig neben einander liegende Werthe, von $x = \mathfrak{x}$ an bis zu $x = \mathfrak{X}$ hin, gesetzt sich denkt*).

Was aber so eben aus dem Gesichtspunkte der Differential-Rechnung angesehen worden ist, kann nun mittelst der vorhergehenden Lehren, namentlich des Lagrange-Taylor'schen Lehrsatzes (§. 27.) noch einmal außer Zweifel gestellt werden. Man hat nämlich (nach §. 27. II.) für $n = 2$

---

*) Man kann sich dabei den Faktor dx, also den Unterschied je zweier nächst auf einander folgenden Werthe von x, entweder immer gleich groß oder ungleich groß denken, nur nicht unendlich-klein von verschiedener Ordnung (§. 23.), schon deshalb nicht, weil die Summe aller dx den endlichen Werth $\mathfrak{X} - \mathfrak{x}$ haben muß, während die Summe unendlich vieler Unendlich-Kleiner von der Form

$$p.x, \; q.x^2, \; r.x^3, \; s.x^4 \text{ etc. etc.}$$

wo p, q, r, s etc. etc. endlich sind, nie einen endlichen Werth hat (§. 23.), sondern unendlich-klein von der ersten Ordnung bleibt.

$$f_{x+h}-f_x=\partial f_x\cdot h+\partial^2 f_{x+\vartheta.h}\cdot\frac{h^2}{2!}.$$

Setzt man nun hier statt x nach und nach alle, um gleiche oder ungleiche, aber immer unendlich-klein von derselben Ordnung gedachte dx, von einander verschiedene Werthe, von $\mathfrak{x}$ an bis zu $\mathfrak{X}$ hin, so wie das jedesmalige dx statt h, und addirt man alle entstehenden Gleichungen, so erhält man, wenn $\partial f_x=\varphi_x$, also $\partial^2 f_x=\partial\varphi_x$ gesetzt wird,

$$f_{\mathfrak{X}}-f_{\mathfrak{x}}=\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}}\varphi_x.\,dx+\Sigma\Big(\partial\varphi_{x+\vartheta.dx}\cdot\frac{(dx)^2}{2!}\Big),$$

in welcher Gleichung der zweite Summand zur Rechten gegen den ersteren offenbar unendlich-klein ist *); so daß (nach §. 23.) solcher wegfallen muß, da die Gleichung zwischen den endlichen Gliedern links und rechts allein schon besteht.

Also findet sich auch auf diesem Wege die wichtige Gleichung

$$(\odot)\cdots\qquad \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}}\varphi_x\cdot dx=\int_{\mathfrak{X}\div\mathfrak{x}}\varphi_x\cdot dx,$$

welche uns lehrt, wie die durch das Zeichen $\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}}\varphi_x\cdot dx$ bezeichnete Summe von unendlich-vielen unendlich-kleinen Gliedern „berechnet" wird.

---

*) Es mögen nämlich die dx ungleich oder gleich gedacht seyn, so läßt sich doch jedes $(dx)^2$ in ein Produkt verwandeln $\varkappa.\delta x$, wo $\varkappa$ unendlich-klein und konstant, δx unendlich-klein und jedesmal $=\frac{(dx)^2}{\varkappa}$ ist. Dann ist aber das Glied Σ, $=\varkappa.\Sigma\partial\varphi_{x+\vartheta.h}\cdot\delta x$, wo offenbar, weil δx noch unendlich-klein der ersten Ordnung ist, $\Sigma\partial^2\varphi_{x+\vartheta.dx}\cdot\delta x$ keinen unendlich-großen Werth hat, so lange nur die Grenzen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ beide endlich sind.

Dieser Beweis ändert sich auch nicht, wenn $\partial^2 f_x$ d. h. $\partial \varphi_x$ innerhalb der Grenzwerthe $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ z. B. für $x = \alpha$ seine Stetigkeit ändern sollte, weil dann höchstens statt eines, unter dem Σ vorkommenden Gliedes $\frac{1}{2} \cdot \partial \varphi_{\alpha + \vartheta . dx} \cdot (dx)^2$ (nach §. 8.) ein Glied von der Form $P \cdot dx^{1+\mu}$ d. h. von der Form $dx \times P \cdot dx^{\mu}$ kommt, wo μ positiv ist, welches Glied also immer noch unendlich-klein von einer höhern als der ersten Ordnung wäre (§. 23.).

Anmerkung 1. Sollte, während $\mathfrak{x} < \mathfrak{X}$, aber $\mathfrak{x}' > \mathfrak{X}$ ist, die Summe aller Werthe von $\varphi_x \cdot dx$ gefunden werden, welche hervorgehen, wenn statt x zuerst alle von $\mathfrak{x}$ an bis zu $\mathfrak{x}'$ hin stetig neben einander liegenden und wachsenden Werthe, nachher aber auch noch alle von $\mathfrak{x}'$ an bis zu $\mathfrak{X}$ hin stetig neben einander liegenden und wieder abnehmenden Werthe gesetzt werden (wovon je zwei auf einander folgende um das stets positiv gedachte unendlich-kleine dx verschieden sind), so würde diese Summe nicht durch ein einziges numerisch-bestimmtes Integral auszudrücken seyn, sondern durch zwei, nämlich durch die Summe

$$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{x}'} \varphi_x \cdot dx + \int_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{x}'} \varphi_x \cdot dx,$$

welche gleich ist der Summe

$$\int_{\mathfrak{x}' \div \mathfrak{x}} \varphi_x \cdot dx + \int_{\mathfrak{x}' \div \mathfrak{X}} \varphi_x \cdot dx.$$

Soll z. B. der Bogen BAC (Fig. 2.) eines Kreises gefunden werden, welcher auf die auf einander senkrechten Axen OX und OY bezogen, durch die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ zwischen $OP = x$ und $PM = y$ gegeben ist, so ist jedes Elementchen dieses Bogens, welches zu der Abscisse x gehört, $= \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx$, wo $\sqrt{r^2 - x^2}$ sowohl

für den obern Zweig der Kurve, wie für den untern Zweig, immer ihren positiven Werth vorstellt, da ein Bogen=Element nie negativ seyn kann. Der Bogen BAC ist nun die Summe aller dieser Elemente, von x = OB, an bis zu x = OA hin, d. h. von B an bis zu A hin, aber dann auch noch die Summe aller der Elemente von A an bis zu C hin, also von x = OA an bis zu x = OC, hin; daher ist, wenn OB, = b, OC, = c gesetzt wird, weil OA = r ist,

$$\text{Bog. BAC} = \int_b^r \frac{r}{+\sqrt{r^2-x^2}}\cdot dx + \int_c^r \frac{r}{+\sqrt{r^2-x^2}}\cdot dx.$$

Das numerisch=bestimmte Integral $\int_b^c \frac{r}{+\sqrt{r^2-x^2}}\cdot dx$ drückt dagegen die Länge des Bogens BC′ aus, welcher um den Bogen C′AC kleiner ist, als der vorige Bogen BAC.

Sollte die Summe aller $\varphi_x \cdot dx$ gefunden werden, welche hervorgehen, wenn statt x alle Werthe gesetzt werden von $\mathfrak{x}$ an bis zu $\mathfrak{x}'$ hin, welches $< \mathfrak{x}$ ist, und dann noch alle Werthe von $\mathfrak{x}'$ an bis zu $\mathfrak{X}$ hin, während wieder $\mathfrak{X} > \mathfrak{x}'$ ist, so ist diese Summe ausgedrückt durch

$$\int_{\mathfrak{x}'}^{\mathfrak{x}} \varphi_x \cdot dx + \int_{\mathfrak{x}'}^{\mathfrak{X}} \varphi_x \cdot dx,$$

also auch durch

$$\int_{\mathfrak{x} \div \mathfrak{x}'} \varphi_x \cdot dx + \int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}'} \varphi_x \cdot dx.$$

Anmerkung 2. Nach dieser Bemerkung muß man sich also auch richten, wenn gefunden werden soll die Summe aller $\varphi_x \cdot dx$, die hervorgehen, wenn man statt x nach und nach alle Werthe gesetzt sich denkt, welche x als Funktion eines andern Veränderlichen t annimmt, sobald statt t nach und

nach alle stetig **wachsenden** Werthe von t, von t an bis zu $\mathfrak{T}$ hin gesetzt werden, während die **zugehörigen** Werthe von x nicht immer fort wachsen von $\mathfrak{x}(=x_t)$ an bis $\mathfrak{X}(=x_{\mathfrak{T}})$ hin, sondern wenn diese Werthe von x dazwischen mehrere Maxima g, g′, g″ etc. und mehrere Minima m, m′, m″ etc. annehmen. — Folgen nämlich z. B. die äußersten und die größten und kleinsten Werthe von x in dieser Ordnung: $\mathfrak{x}$, g, m, g′, m′, g″, $\mathfrak{X}$, so ist die **hier gedachte** Summe aller $\varphi_x \cdot dx$ **keineswegs**

$$=\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} \varphi_x \cdot dx, \text{ also auch nicht } =\int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} \varphi_x \cdot dx,$$

sondern

$$=\int_{\mathfrak{x}}^{g} \varphi_x \cdot dx + \int_{m}^{g} \varphi_x \cdot dx + \int_{m}^{g'} \varphi_x \cdot dx + \int_{m'}^{g'} \varphi_x \cdot dx$$

$$+\int_{m'}^{g''} \varphi_x \cdot dx + \int_{\mathfrak{X}}^{g''} \varphi_x \cdot dx,$$

also auch

$$=\int_{g \div \mathfrak{x}} \varphi_x \cdot dx + \int_{g \div m} \varphi_x \cdot dx + \int_{g' \div m} \varphi_x \cdot dx + \int_{g' \div m'} \varphi_x \cdot dx$$

$$+\int_{g'' \div m'} \varphi_x \cdot dx + \int_{g'' \div \mathfrak{X}} \varphi_x \cdot dx,$$

also auch, wenn $\int \varphi_x \cdot dx = F_x$ gefunden wird,

$$=2F_g + 2F_{g'} + 2F_{g''} - F_{\mathfrak{x}} - 2F_m - 2F_{m'} - F_{\mathfrak{X}}$$

Wäre aber z. B. die Reihe der auf einander folgenden Werthe von x so, daß nach und nach auf einander folgten $\mathfrak{x}$, g, m, g′, m′, $\mathfrak{X}$, so würde die Summe aller $\varphi_x \cdot dx$ seyn

$$=\int_{\mathfrak{x}}^{g}\varphi_x\cdot dx+\int_{m}^{g}\varphi_x\cdot dx+\int_{m}^{g'}\varphi_x\cdot dx+\int_{m'}^{g'}\varphi_x\cdot dx$$
$$+\int_{m'}^{\mathfrak{X}}\varphi_x\cdot dx$$

also auch

$$=\int_{g\div\mathfrak{x}}\varphi_x\cdot dx+\int_{g\div m}\varphi_x\cdot dx+\int_{g'\div m}\varphi_x\cdot dx+\int_{g'\div m'}\varphi_x\cdot dx$$
$$+\int_{\mathfrak{X}\div m'}\varphi_x\cdot dx,$$

d. h.

$$=2F_g+2F_{g'}+F_{\mathfrak{X}}-F_{\mathfrak{x}}-2F_m-2F_{m'}.$$

Folgte (immer für die stetig wachsenden Werthe von t gedacht) die Reihe der Werthe von x so, daß nach und nach auf einander kämen die Werthe $\mathfrak{x}$, m, g, $\mathfrak{X}$, oder die Werthe $\mathfrak{x}$, m, g, m′, $\mathfrak{X}$, so würde die Summe aller $\varphi_x\cdot dx$ im ersten Falle

$$=\int_{m}^{\mathfrak{x}}\varphi_x\cdot dx+\int_{m}^{g}\varphi_x\cdot dx+\int_{\mathfrak{X}}^{g}\varphi_x\cdot dx,$$

$$=F_{\mathfrak{x}}+2F_g-2F_m-F_{\mathfrak{X}},$$

im andern Falle dagegen

$$=\int_{m}^{\mathfrak{x}}\varphi_x\cdot dx+\int_{m}^{g}\varphi_x\cdot dx+\int_{m'}^{g}\varphi_x\cdot dx+\int_{m'}^{\mathfrak{X}}\varphi_x\cdot dx,$$

$$=F_{\mathfrak{x}}+2F_g+F_{\mathfrak{X}}-2F_m-2F_{m'}$$

seyn, immer unter der Voraussetzung, daß $\int\varphi_x\cdot dx=F_x$ ist.

Es ist diese Anmerkung aber in der Anwendung der Lehre der bestimmten Integrale besonders zu beachten. Für die Theorie ist die Bedeutung des Zeichens $\int_{a}^{b}\varphi_x\cdot dx$ festzu-

halten, unter welchem wir bloß die Summe aller derjenigen $\varphi_x \cdot dx$ verstehen, welche erhalten werden, wenn man statt x nicht mehr als gerade nur alle zwischen a und b liegende Werthe setzt und keinen Werth, der außerhalb dieser Grenzen a und b liegt, so wie auch keinen doppelt. Nur unter dieser Voraussetzung ist

$$\int_a^b \varphi_x \cdot dx = \int_{b \div a}^{b} \varphi_x \cdot dx$$

gefunden worden.

§. 33.

Sind beide Grenzen a und b eines numerisch-bestimmten Integrals $\int_a^b \varphi_x \cdot dx$ endliche reelle Zahlen, wie wir dies hier zunächst immer voraussetzen müssen, so hat das numerisch-bestimmte Integral selbst allemal einen Werth,

1) wenn φ_x von $x=a$ an bis zu $x=b$ hin seine Stetigkeit nicht unterbricht; aber auch

2) wenn φ_x für $x=\alpha$, obgleich α nicht außerhalb derselben Grenzen a und b liegt, seine Stetigkeit unterbricht, wenn nur dann φ_x sich auf die Form $\frac{\psi_x}{(x-\alpha)^\mu}$ bringen läßt, und ψ_x für $x=\alpha$ einen endlichen Werth annimmt, während zugleich $\mu < 1$ ist.

3) Ist dagegen unter diesen letzteren Voraussetzungen $\mu \geqq 1$ und der Werth ψ_x für $x=\alpha$ zwar endlich aber nicht Null, so übersteigt der Werth des numerisch-bestimmten Integrals $\int_a^b \varphi_x \cdot dx$ jede Größe, er ist dann unendlich-groß

und eben deshalb einer weiteren Betrachtung nicht mehr unterworfen *).

Beweis. Der erste Theil des Lehrsatzes bedarf keines Beweises. — Ist aber $\varphi_x = \frac{\psi_x}{(x-\alpha)^\mu}$ und liegt der Werth α zwischen a und b, so daß φ_x innerhalb der Grenzen seine Stetigkeit unterbricht und die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, so ist die Summe aller $\varphi_x \cdot dx$ von $x = a$ an bis $x = b$ hin zu zerlegen in die Summe der $\varphi_x \cdot dx$, erstlich von $x = a$ an bis $x = \alpha - \varepsilon$, dann von $x = \alpha - \varepsilon$ an bis zu $x = \alpha$ hin, dann von $x = \alpha$ an bis zu $x = \alpha + \varepsilon$ hin, endlich von $x = \alpha + \varepsilon$ an bis zu $x = b$ hin. Die erste und letzte dieser 4 Summen, nämlich $\int_a^{\alpha-\varepsilon} \varphi_x \cdot dx$ und $\int_{\alpha+\varepsilon}^{b} \varphi_x \cdot dx$, haben entschieden bestimmte endliche Werthe (nach 1.); also darf man nur noch die beiden mittlern Summen

$$\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} \varphi_x \cdot dx \quad \text{und} \quad \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} \varphi_x \cdot dx$$

untersuchen, während ε beliebig klein aber nicht unendlich-klein und positiv gedacht wird.

Wir können uns nun ε so klein denken, daß φ_x von $x = \alpha - \varepsilon$ an bis zu $x = \alpha - dx$ hin einerlei Zeichen behält,

---

*) Das allgemein-bestimmte Integral $\int_{b \div a} \varphi \cdot dx$ hat dagegen immer einen Werth, es mag φ_x zwischen a und b seine Stetigkeit beliebig unterbrechen oder nicht, so lange nur $\int \varphi . dx$ an den Grenzen selbst nicht, in der Rechnung unzulässige Formen annimmt.

welches wir das + Zeichen seyn lassen können, da wir im entgegengesetzten Falle nur $-\varphi_x$ betrachten dürfen, um von $-\varphi_x$ aus auf φ_x selbst zurück schließen zu können. Wir können ferner ε uns so klein denken, daß φ_x von $x = \alpha - \varepsilon$ an bis $x = \alpha - dx$ hin immerfort wächst; desgleichen können wir uns das Integral $\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} \varphi_x \cdot dx$ als die Summe von unendlich-vielen Rechtecken denken, welche die Höhe $PM = \varphi_x$ (Fig. 3.) und die Grundlinie dx haben; — folglich können wir dasselbe Integral als den Inhalt des Flächenraums MPQN ansehen, in welchem $OQ = \alpha$, $PQ = \varepsilon$, $PM = \varphi_{\alpha-\varepsilon}$ und QN eine Asymptote ist, die zu der Abscisse $OQ = \alpha$ gehört, in so ferne φ_x oder φ_α die zugehörige Ordinate ist. Diesem Flächenraum MPQN kommt nun das Rechteck MPQR, dessen

$$\text{Inhalt} = \varphi_{\alpha-\varepsilon} \cdot \varepsilon = \frac{\psi_{\alpha-\varepsilon}}{(-\varepsilon)^\mu} \cdot \varepsilon = (-1)^\mu \cdot \psi_{\alpha-\varepsilon} \cdot \varepsilon^{1-\mu}$$

ist, immer näher und unendlich-nahe, wenn ε immer kleiner und zuletzt unendlich-klein wird. Der Inhalt des Flächenraumes MPQN wird also mit ε zugleich unendlich-klein, so oft $1-\mu$ positiv ist, dagegen endlich, sobald $1-\mu = 0$ wird, und unendlich-groß, wenn $1-\mu$ negativ wird. Da nun das endlich gedachte, wenn auch sehr kleine ε, aus unendlich-vielen unendlich-kleinen ε besteht, so hat man für ein endliches, wenn auch sehr klein gedachtes ε, das Integral $\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} \varphi_x \cdot dx$ als die Summe von unendlich-vielen unendlich-kleinen Werthen anzusehen, so oft $1-\mu$ positiv ist, dagegen als die Summe von unendlich-vielen endlichen oder gar unendlich-großen Werthen zu halten, im Falle $1-\mu = 0$, oder gar $1-\mu$ negativ seyn sollte. — Aehn-

liches läßt sich von dem andern Integral $\int_{\alpha}^{\alpha+e}\varphi_x\cdot dx$ wiederholen. — Daher sehen sich die Behauptungen 2) und 3) des Lehrsatzes außer Zweifel gestellt. —

Ist endlich $\alpha = a$ oder $\alpha = b$, so bleibt der ganze Beweis unverändert, nur daß er noch einfacher wird, weil dann das Integral $\int_{a}^{b}\varphi_x\cdot dx$ nur in zwei (statt in vier) Theil-Integrale zerlegt zu werden braucht *).

§. 34.

Es ist höchst wichtig, daß der Unterschied zwischen einem numerisch-bestimmten Integral und einem allgemein-bestimmten gehörig und entschieden aufgefaßt werde. Daher noch Folgendes:

1) Das allgemein-bestimmte Integral $\int_{b\div a}\varphi_x\cdot dx$ existirt immer, so oft das besondere Integral $\int\varphi_x\cdot dx$ existirt, also in jedem Falle, wenigstens in Form von unendlichen Reihen, obgleich die Grenzen a und b beliebig allgemein (also auch reell oder imaginär) gedacht sind, wie übrigens φ_x auch beschaffen seyn mag, wenn nur solche Funktion für keinen der beiden Grenzwerthe eine im Kalkul unzulässige Form ($\frac{1}{0}$, *log* 0, etc. etc.) in sich aufnimmt, also auch keine numerische und dabei divergente unendliche Reihe.

*) Es ist natürlich leicht, diesen Beweis in ein rein analytisches Gewand zu kleiden, so daß die geometrische Betrachtung hier nur der Kürze und der größern Anschaulichkeit wegen zu Hülfe genommen ist.

2) Das im §. 32. definirte numerisch-bestimmte Integral $\int_a^b \varphi_x \cdot dx$ existirt dagegen nur dann, wenn a und b und alle zu den zwischen a und b liegenden Werthen von x gehörigen Werthe von φ_x reell sind, oder die Stetigkeit auf keine andere Art unterbrochen wird, als die im §. 33. Nr. 2. erlaubte.

3) So oft das numerisch-bestimmte Integral $\int_a^b \varphi_x \cdot dx$ einen Werth hat, so oft ist solcher dem allgemein-bestimmten Integrale $\int_{b \div a} \varphi_x \cdot dx$ gleich, so daß statt eines wirklich existirenden numerisch-bestimmten Integrals allemal sogleich ein allgemein-bestimmtes treten kann. Mit letzterem wird dann (nach den Formeln der §§. 16—20.) „gerechnet", während mit dem ersteren, eben weil es nur das Zeichen für eine reelle Summe und nicht ein allgemeiner Rechnungs-Ausdruck dafür ist, im Allgemeinen nicht, oder doch nur in so ferne „gerechnet" werden kann, als man sich ein allgemein-bestimmtes Integral darunter denkt.

Um dies letztere zu erläutern, fügen wir noch hinzu, daß diese Behauptung durchaus nichts Neues enthält. Denken wir uns eine algebraische Aufgabe, in welcher eine Größe, d. h. eigentlich eine unbekannte ganze oder gebrochene Zahl z, gesucht wird. Die Aufgabe wird nun angesetzt dadurch, daß man zwei verschiedene Ausdrücke angiebt (die alle beide den Unbekannten z enthalten, oder von denen nur einer diesen z enthält und) welche, trotz der Verschiedenheit ihrer Form, doch eine und dieselbe Größe, d. h. eigentlich eine und dieselbe (ganze oder gebrochene unbenannte) Zahl ausdrücken,

und daher einander gleich sind. In dieser ersten (Ansatz-) Gleichung stellen also die Ausdrücke zur Linken und zur Rechten des = Zeichens eine und dieselbe ganze oder gebrochene Zahl wirklich vor. Diese Gleichung wird aber nun nach z aufgelöst, d. h. in eine andere Gleichung verwandelt von der Form $z = A$, wo A einen Ausdruck vorstellt, der eine ganze oder gebrochene Zahl ist, so daß in dieser End-Gleichung auf beiden Seiten abermals eine ganze oder gebrochene Zahl und wiederum eine und dieselbe wirklich vorgestellt ist. Um aber von der erstern Gleichung zu der andern zu gelangen, muß man „rechnen", d. h. die allgemeinen Gesetze der Operationen zur Umformung anwenden, und dabei kann man sich durchaus nicht darum bekümmern, ob die Ausdrücke in den einzelnen Zwischen-Gleichungen auch jedesmal eine ganze oder gebrochene Zahl wirklich bezeichnen oder nicht; — wenn man alle Ausdrücke nur als angezeigte Operationen, — als Formen, — nach den ihnen allgemein zustehenden Gesetzen behandelt, so ist man sicher, nie auf Widersprüche zu stoßen, und stößt man daher auf die Endgleichung $z = A$, so kann auch diese keinen Widerspruch enthalten, muß also, wenn sie sonst dem Zwecke entspricht, auch das gesuchte richtige Resultat liefern.

Gerade so ist es aber auch hier; die unmittelbare Betrachtung eines besonderen Falles der Anwendung führt zu einem numerisch-bestimmten Integral. Man setzt das ihm gleiche allgemein-bestimmte Integral dafür, und hat es nun in eine allgemeine Form gebracht, die gewissen allgemeinen Gesetzen der Rechnung unterworfen ist. Man „rechnet", nun mit dieser allgemeinen Form, ohne sich um die speciellere Bedeutung derselben zu bekümmern nach den Gesetzen der §. 16. bis §. 20. von denen man weiß, daß ihre Anwendung nie zu Widersprüchen führen kann, so daß die Endresultate, wenn

sie sonst ihrer Form nach genügen, auch **nothwendig richtige** Resultate seyn müssen.

4) Hat aber ein numerisch-bestimmtes Integral $\int_{\mu}^{\nu} f_x \cdot dx$ gar keinen Werth, entweder weil die Grenzen nicht reell sind, oder weil die Funktion f_x innerhalb der Grenzen ihre Stetigkeit auf eine Weise ändert, daß die angezeigte Summe unendlich-groß werden müßte, so ist für die Summe, die nun gar nicht existirt, natürlich auch Nichts zu setzen, also auch nicht das allgemein bestimmte Integral $\int_{\nu \div \mu} f_x \cdot dx$, obgleich letzteres einem völlig bestimmten Ausdruck gleich ist, also (in diesem Sinne) einen völlig bestimmten Werth hat.

Aber eben so haben wir in der „ersten Abhandlung" gesehen, daß z. B. die allgemeine unendliche Reihe

$$1+x+x^2+x^3+x^4+ \text{ in inf.}$$

dem endlichen Ausdruck

$$\frac{1}{1-x}$$

gleich ist, daß aber, wenn man statt x etwa 2 setzen wollte, die numerische und divergente Reihe

$$1+2+4+8+16+32+ \text{ in inf.}$$

eben **weil sie gar keinen Werth hat**, auch keineswegs dem Werthe $\frac{1}{1-2}$ oder -1 der allgemeinen Summe $\frac{1}{1-x}$ (für $x=2$) gleich seyn kann.

5) Ist in dem numerisch-bestimmten Integral $\int_a^b f_x \cdot dx$ die Funktion f_x nur einförmig, so hat solches numerisch-bestimmte Integral allemal, wenn es überhaupt einen Werth

hat, nur einen einzigen Werth, während das allgemein-bestimmte Integral $\int\limits_{b \div a} f_x \cdot dx$ mehrere, ja unendlich-viele Werthe haben kann.

So hat z. B. das numerisch-bestimmte Integral $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$ den bestimmten Werth $\frac{1}{4}\pi$; dagegen hat das allgemein-bestimmte Integral $\int\limits_{1 \div o} \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$ den Werth $\frac{1}{Tg}1 - \frac{1}{Tg}o$, d. h. den Werth $(n+\frac{1}{4})\pi$, wo n Null und jede positive, auch jede negative ganze Zahl vorstellt.

Die Gleichung §. 32. ⊙, nämlich die Gleichung

$$\int\limits_a^b f_x \cdot dx = \int\limits_{b \div a} f_x \cdot dx,$$

ist daher nur eine unvollständige (unvollkommene) Gleichung, welche bloß lehrt, daß unter den Werthen des Ausdrucks zur Rechten der Werth des Ausdrucks zur Linken mit begriffen seyn muß.

Ganz das Analoge gilt, wenn auch die Funktion f_x vielförmig seyn sollte, für jede einzelne Reihe zusammengehöriger Werthe von f_x ins Besondere*).

6) In Gleichungen zwischen numerisch-bestimmten Integralen, kann man allemal statt der numerisch-bestimmten Integrale die ihnen (nach §. 32.) gleichen allgemein-bestimmten Integrale setzen und man hat allemal und nothwendig wieder eine richtige Gleichung, wenn auch nicht gerade nothwendig eine vollkommene Gleichung (d. h. nicht immer eine Gleichung, deren beide Seiten gleich viel und genau dieselben

*) Ein und dasselbe allgemein-bestimmte Integral kann daher mehreren numerisch-bestimmten Integralen gleich seyn, ohne daß letztere deshalb einander gleich seyn müssen.

Werthe haben, so daß jede Seite genau und unbedingt statt der andern gesetzt werden könnte).

7) Dasselbe gilt aber nicht umgekehrt, auch wenn die numerisch-bestimmten Integrale, welche man statt der allgemein-bestimmten setzen wollte, wirklich Sinn und Bedeutung haben; da Gleichungen zwischen mehrdeutigen Ausdrücken nur dann richtige Gleichungen zwischen ihren einzelnen Werthen liefern werden, wenn man diese Werthe als zusammengehörige heraussucht, nicht aber wenn man die ersten besten Werthe nimmt.

Auch dieser Punkt ist in Einzelfällen wohl zu beachten.

§. 35.

Aber eben, weil dem so ist, ist es interessant, die immer gültigen Gleichungen der §§. 17—20. zwischen allgemein-bestimmten Integralen einer Durchsicht zu unterwerfen und zu sehen, was aus ihnen wird, wenn man sich statt der allgemein-bestimmten Integrale numerisch-bestimmte gesetzt denkt.

Versucht man dies aber zunächst mit der Formel Nr. 6. §. 19., welche geben würde

$$\int_a^b f_x \cdot dx = -\int_b^a f_x \cdot dx,$$

so fällt sogleich in die Augen, daß diese Formel keinen Sinn hat, wenn nicht der im §. 32. gegebene Begriff des numerisch-bestimmten Integrals dahin erweitert wird,

daß man, wenn μ und ν reell sind, aber $\mu <, =$ oder $> \nu$ ist, unter $\int_\mu^\nu f_x \cdot dx$ die Summe aller Werthe des Produkts $f_x \cdot dx$ sich denkt, wenn unter dx jedesmal

$\frac{\nu-\mu}{n}$, dabei n unendlich groß und positiv gedacht wird (so daß dx positiv, negativ oder Null wird, je nachdem $\mu<\nu$, $\mu>\nu$, oder $\mu=\nu$ seyn sollte), statt x aber nach und nach alle von μ an bis zu ν hin um dieses (positive oder negative) dx verschiedene (wachsende oder abnehmende) Werthe gesetzt werden.

Nach diesem erweiterten Begriff des numerisch-bestimmten Integrals ist also der Faktor dx in den zu summirenden unendlich-kleinen Elementchen allemal negativ zu nehmen, so oft die untere Grenze größer seyn sollte als die obere, während beide Grenzen doch immer reell seyn müssen.

Es ist dann leicht zu beweisen, daß für diesen erweiterten Begriff des numerisch-bestimmten Integrals noch immer (wie im §. 32. ⊙) seyn werde

$$(\odot)\cdots \qquad \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_x \cdot dx = \int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} f_x \cdot dx,$$

auch wenn $\mathfrak{X}<\mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{X}=\mathfrak{x}$ seyn sollte.

§. 36.

Verfolgt man nun in derselben Absicht den Inhalt des §. 17. und setzt man daselbst statt der allgemein-bestimmten Integrale jetzt numerisch-bestimmte, so fragt es sich also, ob

$$\text{I.} \quad \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} (A \cdot \varphi_x) \cdot dx = A \cdot \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} \varphi_x \cdot dx;$$

$$\text{II.} \quad \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} (\varphi_x \pm \psi_x) \cdot dx = \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} \varphi_x \cdot dx \pm \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} \psi_x \cdot dx$$

ist.

III. Ferner fragt sich, wenn $\int \psi_x \cdot dx = f_x$ gesetzt wird, so daß f_x ein besonderes Integral von ψ nach x ist (weshalb dann auch $\partial f_x = \psi_x$ seyn muß) — ob dann die Gleichung

$$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} (\varphi_x \cdot \psi_x) \cdot dx = (\varphi_{\mathfrak{X}} \cdot f_{\mathfrak{X}} - \varphi_{\mathfrak{x}} \cdot f_{\mathfrak{x}}) - \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} (\partial \varphi_x \cdot f_x) \cdot dx$$

stets eine richtige Gleichung seyn werde.

Endlich entsteht die Frage, ob auch

$$\text{IV.} \quad \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_x \cdot dx = \int_{\mathfrak{z}}^{Z} f_{(z)} \cdot \partial x_z \cdot dz$$

allemal eine richtige Gleichung seyn werde, wenn x und z durch eine Gleichung $L_{x,z} = o$ mit einander zusammenhängen, und $\mathfrak{z}$ und Z Werthe von z sind, welche bezüglich für $x = \mathfrak{x}$ und $x = \mathfrak{X}$ sich aus $L = o$ ergeben, und wenn $f_{(z)}$ das bedeutet, was aus f_x wird, sobald in dieser Funktion f_x (die noch nicht z enthalten darf) jetzt die aus $L = o$ gezogene Funktion x_z statt x gesetzt wird.

Untersucht man dies alles, so findet man:

Die Gleichung I. ist richtig, weil die einzelnen Summanden der Summe zur Linken den gemeinschaftlichen Faktor A haben, der auf der rechten Seite herausgerückt sich steht. —

Die Gleichung II. ist richtig, weil die einzelnen Summanden zur Linken sich in die einzelnen Summanden zur Rechten zerlegen.

Die Gleichung III. läßt sich wie folgt erweisen: Es ist nach 2. und weil ∂f_x statt ψ_x gesetzt werden kann

$$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} (\varphi_x \cdot \psi_x) \cdot dx + \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} (\partial \varphi_x \cdot f_x) \cdot dx = \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} (\varphi_x \cdot \partial f_x + \partial \varphi_x \cdot f_x) \cdot dx;$$

weil aber $\int(\varphi_x \cdot \partial f_x + f_x \cdot \partial \varphi_x) \cdot dx = \varphi_x \cdot f_x$ ist, so wird diese Summe auch $= \varphi_{\mathfrak{X}} \cdot f_{\mathfrak{X}} - \varphi_{\mathfrak{x}} \cdot f_{\mathfrak{x}}$ (nach §. 32.), woraus die Richtigkeit der III. hervorgeht.

Auch gelten diese 3 Gleichungen, es mag $\mathfrak{x} <, =$ oder $> \mathfrak{X}$ seyn, wenn man nur den erweiterten Begriff des §. 35. zu Grunde legt, nach welchem der Faktor dx stets negativ gedacht wird, so oft $\mathfrak{x} > \mathfrak{X}$ ist.

Was aber die Gleichung IV. betrifft, so zeigt sich bald, daß sie nicht wahr ist,

a) wenn zu den reellen Werthen von x, von $x = \mathfrak{x}$ an bis zu $x = \mathfrak{X}$ hin, nicht lauter reelle Werthe von z gehören; weil dann der Begriff des numerisch-bestimmten Integrals aufhört;

b) auch nicht, wenn, während die Werthe von x, von $x = \mathfrak{x}$ an bis zu $x = \mathfrak{X}$ hin, stets wachsen oder abnehmen, die zugehörigen Werthe von z zwar alle reell sind, aber zwischen $z = \mathfrak{z}$ und $z = Z$ ein Maximum oder Minimum, oder mehrere Maxima und Minima erfahren.

Dagegen bleibt der Satz IV. wahr,

1) wenn zu allen reellen und wachsenden Werthen von x, von $x = \mathfrak{x}$ an bis zu $x = \mathfrak{X}$ hin, lauter reelle und stets wachsende oder stets abnehmende Werthe von z sich ergeben;

2) oder wenn zu allen reellen und stets abnehmenden Werthen von x (wenn $\mathfrak{x} > \mathfrak{X}$ seyn sollte) ebenfalls lauter reelle und entweder stets abnehmende oder stets wachsende Werthe von z gehören,

sobald nur überhaupt diese numerisch-bestimmten Integrale, nach dem erweiterten Begriffe des §. 35., einen wirklichen reellen endlichen Werth haben.

Es folgt dies alles unmittelbar aus der Anmerkung 2. zu §. 32. — Nichts destoweniger wollen wir hier noch die einzelnen Fälle näher betrachten. —

Es sey zunächst $\mathfrak{x} < \mathfrak{X}$ vorausgesetzt, und dann mögen

1) die zu den stetig wachsenden Werthen von x gehörigen Werthe von z ebenfalls stets wachsen (z. B. wenn $z = x^3$ ist); — dann ist ∂z_x, also auch ∂x_z fortwährend positiv, also, wegen $dx = \partial x_z \cdot dz$, auch dz fortwährend positiv mit dx zugleich. Es sind daher nicht bloß alle

$$f_x \cdot dx \quad \text{und} \quad f_{(z)} \cdot \partial x_z \cdot dz$$

einzeln bezüglich einander gleich, sondern es enthalten auch die Summen

$$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_x \cdot dx \quad \text{und} \quad \int_{\mathfrak{z}}^{Z} (f_{(z)} \cdot \partial x_z) \cdot dz$$

genau dieselben Summanden, die eine keinen mehr, keinen weniger als die andere.

Sind aber

2) die zu den stetig von $\mathfrak{x}$ bis zu $\mathfrak{X}$ wachsenden Werthen von x gehörigen Werthe von z, von $\mathfrak{z}$ an bis zu Z hin, stetig abnehmend (z. B. wenn $z = \frac{1}{x}$ ist), so ist ∂x_z wie ∂z_x fortwährend negativ, also auch, wegen $dx = \partial x_z \cdot dz$, der Faktor dz stets negativ (innerhalb der fraglichen Grenzen). Nun sind aber nicht bloß alle

$$f_x \cdot dx \quad \text{und} \quad f_{(z)} \cdot \partial x_z \cdot dz$$

einzeln einander gleich, so lange man, während dx positiv gedacht ist, dz fortwährend negativ nimmt, sondern nach dem erweiterten Begriffe des §. 35. (in so ferne hier $Z < \mathfrak{z}$ ist) bedeutet auch das Zeichen $\int_{\mathfrak{z}}^{Z} (f_{(z)} \cdot \partial x_z) \cdot dz$ gerade die Summe aller der Werthe von $f_{(z)} \cdot \partial x_z \cdot dz$, in denen dz negativ genommen wird. Also leidet die Wahrheit des Satzes

$$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_z \cdot dx = \int_{\mathfrak{z}}^{Z} f_{(z)} \cdot \partial x_z \cdot dz$$

auch in diesem Falle keinen Zweifel.

3) Setzen wir aber nun einmal beispielsweise den Fall, daß zwar $\mathfrak{x} < \mathfrak{X}$ und $\mathfrak{z} \leqq Z$ ist, daß aber die Werthe von z, wie sie zu den stetig auf einander folgenden, stets wachsenden Werthen von x gehören, erst von $\mathfrak{z}$ an bis zu $\mathfrak{z}'$ hin stets wachsen, dann aber von $\mathfrak{z}'$ an bis zu Z hin stets wieder abnehmen, so daß also $\mathfrak{z}'$ ein größter Werth von z ist, der zu dem Werthe $\mathfrak{x}'$ von x gehören mag, und welcher, der Voraussetzung zufolge, nicht zwischen $\mathfrak{z}$ und Z liegt.

In diesem Beispiele kann man zuerst die Summe $\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_x \cdot dx$ zerlegen in $\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{x}'} f_x \cdot dx + \int_{\mathfrak{x}'}^{\mathfrak{X}} f_x \cdot dx$. — Der erste Theil dieser Summe, nämlich

$$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{x}'} f_x \cdot dx, \quad \text{ist nun} = \int_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{z}'} f_{(z)} \cdot \partial x_z \cdot dz \, (= A),$$

während der andere Theil der obigen Summe, nämlich

$$\int_{\mathfrak{x}'}^{\mathfrak{X}} f_x \cdot dx, \quad = \int_{\mathfrak{z}'}^{Z} f_{(z)} \cdot \partial x_z \cdot dz \, (= B),$$

also auch (nach §. 35.) $= -\int_{Z}^{\mathfrak{z}'} f_{(z)} \cdot \partial x_z \cdot dz \, (= -C)$ ist.

Da man ferner, weil Z zwischen $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ liegt, die Summe

A oder $\int\limits_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{z}'} f_{(z)} \cdot \partial x_z \cdot dx$ auch wieder zerlegen kann

in D+E, wenn $D = \int\limits_{\mathfrak{z}}^{Z} f_{(z)} \cdot \partial x_z \cdot dz$ und $E = \int\limits_{Z}^{\mathfrak{z}'} f_{(z)} \cdot \partial x_z \cdot dz$

genommen wird, so findet sich

$$\int\limits_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_x \cdot dx = D + E - C, \text{ d. h.}$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{z}}^{Z} f_{(z)} \cdot \partial x_z \cdot dz + \int\limits_{Z}^{\mathfrak{z}'} f_{(z)} \cdot \partial x_z \cdot dz - \int\limits_{Z}^{\mathfrak{z}'} f_{(z)} \cdot \partial x_z \cdot dz.$$

Wäre nun, wie dies der Fall zu seyn scheint, E=C, so würde allerdings unser Satz

$$\int\limits_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_x \cdot dx = \int\limits_{\mathfrak{z}}^{Z} f_{(z)} \cdot \partial x_z \cdot dz$$

auch in diesem Beispiele wahr seyn. Obgleich aber die Ausdrücke E und C völlig dieselben zu seyn scheinen, so sind sie doch nie einander gleich, und zwar deshalb nicht, weil der Faktor ∂x_z in beiden Ausdrücken E und C, für einen und denselben Werth von z, jedesmal zwei ganz verschiedene Werthe vorstellt, nämlich in E einen positiven, in C dagegen einen negativen; denn in E sind die Werthe von z mit denen von x zugleich im Wachsen begriffen, also ist ∂z_x, demnach auch ∂x_z allemal positiv; dagegen sind in C oder B die Werthe von z wieder im Abnehmen begriffen, während die von x, — von $\mathfrak{x}'$ an bis zu $\mathfrak{X}$ hin — noch immer wachsen; also ist in C der Faktor ∂x_z allemal negativ; — folglich sind E und C einander nicht gleich. — Also gilt unsere Gleichung IV. nicht, in diesem Beispiele.

Anmerkung 1. Ein numerisch-bestimmtes Integral kann also genau wie das andere aussehen, ohne daß beide einander gleich wären. Es liegt dieses an der Mehrdeutigkeit derjenigen Ausdrücke, welche (allgemeine Potenzen, Logarithmen, besonders aber) Wurzeln enthalten. Das nachstehende Beispiel wird die Sache näher erläutern. Es werde $\int_0^2 x^3 \cdot dx$ betrachtet. Setzt man hier $z+x^2=2x$, so hat man $f_x=x^3$, $\mathfrak{x}=0$, $\mathfrak{X}=2$, $\mathfrak{z}=0$, $Z=0$, $\mathfrak{x}'=1$, $\mathfrak{z}'=1$, $z=2x-x^2$, $x=1\mp\sqrt{1-z}$, $\partial x_z=\pm\frac{1}{2\sqrt{1-z}}$, $f_{(z)}=(1\mp\sqrt{1-z})^3$; und nun ist keineswegs

$$\int_0^2 x^3 \cdot dx = \int_0^0 \frac{(1\mp\sqrt{1-z})^3}{\pm\sqrt{1-z}} \cdot dz,$$

weil danach das Integral zur Linken der Null gleich werden würde.

Wohl aber hat man (nach der vorstehenden Nr. 3.)

$$(\odot)\cdots \quad \int_0^2 x^3 \cdot dx = \int_0^0 \frac{(1\mp\sqrt{1-z})^3}{\pm\sqrt{1-z}} \cdot dz + \int_0^1 \frac{(1\mp\sqrt{1-z})^3}{\pm\sqrt{1-z}} \cdot dz$$
$$-\int_0^1 \frac{(1\mp\sqrt{1-z})^3}{\pm\sqrt{1-z}} \cdot dz,$$

wenn man nur in dem 2ten der Integrale zur Rechten von den $\pm\mp$ alle oberen Zeichen, im 3ten aber alle unteren Zeichen zugleich gelten läßt, so daß, weil das erstere der Integrale zur Rechten $=0$ ist, diese Gleichung in

$$(\mathfrak{C})\cdots \quad \int_0^2 x^3 \cdot dx = \int_0^1 \frac{(1-\sqrt{1-z})^3}{\sqrt{1-z}} \cdot dz + \int_0^1 \frac{1+\sqrt{1-z}}{\sqrt{1-z}} \cdot dz$$

übergeht. Und in der That findet sich

$$\int\frac{(1\mp\sqrt{1-z})^3}{\pm\sqrt{1-z}}\cdot dz = \tfrac{1}{4}(1\mp\sqrt{1-z})^4,$$

also $$\int\frac{(1-\sqrt{1-z})^3}{\sqrt{1-z}}\cdot dz = \tfrac{1}{4}(1-\sqrt{1-z})^4$$

und $$\int\frac{(1+\sqrt{1-z})^3}{-\sqrt{1-z}}\cdot dz = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{1-z})^4;$$

dies giebt $$\int_0^1\frac{(1-\sqrt{1-z})^3}{\sqrt{1-z}}\cdot dz = \tfrac{1}{4},$$

$$\int_0^1\frac{(1+\sqrt{1-z})^3}{\sqrt{1-z}} = -\int_0^1\frac{(1+\sqrt{1-z})^3}{-\sqrt{1-z}}\cdot dz = \tfrac{1}{4}(-1+2^4);$$

wird dies zusammen addirt, so erhält man für den Ausdruck zur Rechten in (⊙), oder besser in (☾), den Werth $\frac{1}{4}\cdot 2^4$ oder 4; und dies ist gerade auch der Werth des numerisch-bestimmten Integrals zur Linken in (⊙), oder in (☾)*).

Anmerkung 2. Während also die Gleichung

$$\int_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{X}} f_x\cdot dx = \int_{\mathfrak{z}}^{Z} f_{(z)}\cdot\partial x_z\cdot dz$$

zwischen numerisch-bestimmten Integralen nur ausnahmsweise wahr ist, gilt doch die analoge Gleichung

---

*) Die Integrale in (☾) zur Rechten sind solche, in denen die zu integrirende Funktion an der Grenze, wo $z=1$ ist, ihre Stetigkeit unterbricht und die Form $\frac{1}{0}$ annimmt. Selbige gehört aber zu den in §. 33. Nr. 2. erwähnten, bei denen die Summirung ihrer unendlich-vielen auf einander folgenden unendlich-kleinen Werthe keine Schwierigkeit hat.

$$\int_{\mathfrak{X}\div\mathfrak{x}} f_x \cdot dx = \int_{Z\div\mathfrak{z}} f_{(z)} \cdot \partial x_z \cdot dz$$

zwischen allgemein-bestimmten Integralen, wie in §. 17. IV. gesagt und bewiesen steht, allemal und unbedingt und namentlich auch dann,

a) wenn, obgleich $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ reell gedacht sind, doch $\mathfrak{z}$ oder Z, oder beide imaginär werden, und auch

b) wenn die Werthe von z zu den reell gedachten Werthen von x selbst alle reell sind, dabei aber beliebig viele Maxima oder Minima dazwischen haben.

Ad a. Wird z. B. $f_x = \frac{1}{x}$ genommen und statt der Gleichung $L_{x,z} = o$ die Gleichung $x^2 + z^2 = 1$; — wird ferner $\mathfrak{X} = 3$, $\mathfrak{x} = 2$ gedacht, also $Z = \sqrt{-8}$ und $\mathfrak{z} = \sqrt{-3}$ dazu gefunden, so ist (nach §. 17. IV.), weil dann $\frac{1}{x} \cdot \partial x_z = -\frac{z}{1-z^2}$ ist,

$$(\mathfrak{C})\cdots \int_{3\div 2} \frac{1}{x} \cdot dx = \int_{\sqrt{-8}\div\sqrt{-3}} \left(-\frac{z}{1-z^2}\right) \cdot dz$$

eine ganz richtige Gleichung. Denn es zerlegt sich $-\frac{z}{1-z^2}$ in $-\frac{\frac{1}{2}}{1-z} + \frac{\frac{1}{2}}{1+z}$; folglich ist

$$\int -\frac{z}{1-z^2} \cdot dz = \tfrac{1}{2} \log(1-z) + \tfrac{1}{2} \log(1+z) = \tfrac{1}{2} \log(1-z^2).$$

Dann ist aber weiter

$$\int_{\sqrt{-8}\div\sqrt{-3}} \left(-\frac{z}{1-z^2}\right) \cdot dz = \tfrac{1}{2} \log 9 - \tfrac{1}{2} \log 4 = \tfrac{1}{2} \log \tfrac{9}{4} = \log \tfrac{3}{2};$$

und genau dasselbe findet sich auch für $\int_{3\div 2} \frac{1}{x} \cdot dx$ zur Linken der Gleichung $\mathfrak{C}$.

Ad b. Es sey die Länge des Bogens CEMD (Fig. 4.) zu berechnen, wenn OA = a, OB = b, OP = MQ = x, OQ = PM = z, OM = r, die Kurve ein Kreis, also ihre Gleichung $x^2+z^2=r^2$ ist. —

Es ist die Länge dieses Bogens der Summe aller durch $\sqrt{dx^2+dz^2}$ oder $\sqrt{1+\partial z^2_x}\cdot dx$ ausgedrückten unendlich-kleinen Theilchen desselben gleich, also

$$=\int_{-a}^{+b}\sqrt{1+\partial z^2_x}\cdot dx \quad \text{d. h.} \quad =\int_{-a}^{b}\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\cdot dx$$

$$=r\cdot Arc\,sin\cdot\frac{b}{r}-r\cdot Arc\,sin\cdot\frac{-a}{r}=r\cdot Arc\,sin\cdot\frac{b}{r}$$

$$+r\cdot Arc\,sin\cdot\frac{a}{r},$$

wenn $Arc\,sin\cdot y$ den kleinsten positiven (oder negativen) Bogen bedeutet, dessen Sinus das positive (oder negative) y ist. (Einl. Nr. 28.)

Wollte man in dem Integral $\int_{-a}^{b}\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\cdot dx$ statt x einen neuen Veränderlichen z einführen mittelst der Gleichung $x^2+z^2=r^2$, welche $x=\sqrt{r^2-z^2}$, $\partial x_z=\frac{-z}{\sqrt{r^2-z^2}}$ liefert, so würde man erhalten

$$\int\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\cdot dx=\int\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\cdot\frac{-z}{\sqrt{r^2-z^2}}\cdot dz$$

$$=\int\frac{-r}{\sqrt{r^2-z^2}}\cdot dz,$$

während sich direkt findet

$$\int\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\cdot dx=r\cdot\frac{1}{sin}(x/r),\quad \int\frac{-r}{\sqrt{r^2-z^2}}\cdot dz=r\cdot\frac{1}{cos}(z/r).$$

Setzt man nun $\mathfrak{x} = -a$, $\mathfrak{X} = +b$, so wird $\mathfrak{z} = \sqrt{r^2 - a^2} = \pm m$, $Z = \sqrt{r^2 - b^2} = \pm n$, wenn $AC = m$, $BD = n$ gesetzt wird, und es ist nun nicht

$$(p) \cdots \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx = \int_{\mathfrak{z}}^{Z} - \frac{r}{\sqrt{r^2 - z^2}} \cdot dz$$

d. h. nicht

$$(\odot) \cdots \int_{-a}^{b} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx = \int_{\pm m}^{\pm n} \frac{-r}{\sqrt{r^2 - z^2}} \cdot dz,$$

wie man auch die Grenzen $+m$, $+n$, $-m$, $-n$ mit einander in Verbindung bringen mag. Nimmt man nämlich $\int_m^n \frac{-r}{\sqrt{r^2 - z^2}} \cdot dz$, so ist diese im Sinne der §§. 32. 35. genommene Summe negativ (weil in der Figur $n > m$ gedacht ist), wenn man nicht die $\sqrt{r^2 - z^2}$ negativ nimmt. Thut man aber letzteres, so erhält man für diese Summe den Werth $r \cdot Arc\,sin \cdot \frac{n}{r} - r \cdot Arc sin \cdot \frac{m}{r}$, d. h. Bog. DF — Bog. CH = Bog. CG. — Nimmt man aber $\int_{-m}^{-n} \frac{-r}{\sqrt{r^2 - z^2}} \cdot dz$, so bekommt man dasselbe Resultat positiv oder negativ, je nachdem $\sqrt{r^2 - z^2}$ positiv oder negativ genommen wird. — Nimmt man $\int_{-m}^{+n} \frac{-r}{\sqrt{r^2 - z^2}} \cdot dz$, so erhält man wieder etwas negatives, so lange man die Wurzel $\sqrt{r^2 - z^2}$ positiv nimmt, dagegen erhält man 2 Bog. CH + Bog. CG, oder Bog. CH + Bog. DF, sobald man der $\sqrt{r^2 - z^2}$ ihren negativen Werth giebt. — Wollte man endlich $\int_m^{-n} \frac{-r}{\sqrt{r^2 - z^2}} \cdot dz$

nehmen, so würde diese Summe = Bog. CH + Bog. DF, positiv oder negativ genommen. — In keinem Falle erhält man also den Bogen CGED, welchen das nach x genommene ursprüngliche Integral vorstellt. — In dem Zeichen $\int_p^q \frac{r}{\sqrt{r^2-z^2}} \cdot dz$ aber eine Summe repräsentirt sich zu denken von unendlich-vielen unendlich-kleinen Summanden, in denen aber $\sqrt{r^2-z^2}$ zum Theil ihren positiven, zum Theil jedoch ihren negativen Werth vorstellte, liegt nicht in den Definitionen der §§. 32. 35. und kann auch deshalb nicht und nie hineingelegt werden, weil man im Allgemeinen die Grenzen nicht angeben könnte, an welchen die zu integrirende Funktion ihre Form ändern soll.

Dagegen ist, während die obige Gleichung (⊙) unrichtig ist, doch allemal

$$(\mathfrak{C})\cdots \int_{b \div (-a)} \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} \cdot \mathfrak{d}x = \int_{(\pm n)\div(\pm m)} \frac{-r}{\sqrt{r^2-z^2}} \cdot dz.$$

Das allgemein-bestimmte Integral zur Linken hat nämlich die unendlich-vielen Werthe

$$r \cdot \left(\frac{1}{sin} \frac{b}{r} - \frac{1}{sin} \frac{-a}{r} \right)$$

oder (nach Einl. Nr 28. I.) die Werthe

$$r \cdot \left(\begin{Bmatrix} 2\nu\pi + Arc\,sin \cdot \frac{b}{r} \\ (2\nu+1)\,\pi - Arc\,sin\,\frac{b}{r} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2\nu'\pi + Arc\,sin \cdot \frac{a}{r} \\ (2\nu'+1)\,\pi + Arc\,sin \cdot \frac{a}{r} \end{Bmatrix} \right)$$

d. h. die unendlich-vielen Werthe

$$r \cdot \begin{Bmatrix} 2\mu\pi \pm (Arc\,sin \cdot \frac{b}{r} + Arc\,sin \cdot \frac{a}{r}) \\ (2\mu+1)\,\pi \pm (Arc\,sin \cdot \frac{a}{r} - Arc\,sin \cdot \frac{b}{r}) \end{Bmatrix}$$

d. h. die unendlich-vielen Werthe

$$\left.\begin{matrix} 2\mu r\pi \pm \text{Bog. CGED} \\ (2\mu+1)r\pi \pm \text{Bog. CG} \end{matrix}\right\},$$

die man erhält, wenn statt μ nach und nach Null und jede positive, auch jede negative ganze Zahl gesetzt wird.

Das Integral auf der rechten Seite der Gleichung C hat dagegen die unendlich-vielen Werthe

$$r\cdot\left(\frac{1}{cos}(\pm\frac{n}{r})-\frac{1}{cos}(\pm\frac{m}{r})\right),$$

d. h. (nach Einl. Nr. 28. II.) die unendlich-vielen Werthe

$$r\cdot\left(\left[2\nu\pi\pm Arc\,cos\cdot(\pm\frac{n}{r})\right]-\left[2\nu'\pi\pm Arc\,cos\cdot(\pm\frac{m}{r})\right]\right).$$

Weil aber $Arc\,cos\cdot(-\frac{n}{r})=\pi-Arc\,cos\cdot\frac{n}{r}$ und eben so $Arc\,cos\cdot(-\frac{m}{r})=\pi-Arc\,cos\cdot\frac{m}{r}$ ist (nach Einleitung Nr. 28. b.), so sind die obigen unendlich-vielen Werthe ausgedrückt durch

$$r\cdot\left[\left(\nu\pi\pm Arc\,cos\cdot\frac{n}{r}\right)-\left(\nu'\pi\pm Arc\,cos\cdot\frac{m}{r}\right)\right]$$

d. h. durch $\mu r\pi\pm r\cdot Arc\,cos\cdot\frac{n}{r}\pm r\cdot Arc\,cos\cdot\frac{m}{r}$

d. h. durch $\mu r\pi\pm$ Bog. DF $\pm$ Bog. CH

d. h. durch $\left.\begin{matrix}\mu r\pi\pm \text{Bog. CG} \\ \mu r\pi\pm(r\pi-\text{Bog. CGED}\end{matrix}\right\}$

d. h. durch $\left.\begin{matrix}\mu r\pi\pm \text{Bog. CG} \\ \mu r\pi\pm \text{Bog. CGED}\end{matrix}\right\}$

Es hat daher das Integral zur Rechten in C doppelt so viele Werthe als das zur Linken, dagegen darunter alle die Werthe des letztern, und daher auch den Werth, welcher die Länge des gesuchten Bogens CGED ausdrückt, den man nun durch spezielle Betrachtungen von den übrigen unendlich-vielen Werthen absondern muß.

Hätte man die Grenzen des Integrals zur Rechten in C, welche bezüglich $\sqrt{r^2-a^2}$ und $\sqrt{r^2-b^2}$ sind, bloß positiv genommen, also bezüglich m und n, so hätte man für dieses Integral erhalten die unendlich-vielen Werthe

$$2\mu r\pi \pm r\cdot Arc\cos\cdot\frac{n}{r} \pm r\cdot Arc\cos\cdot\frac{m}{r}$$

d. h.
$$\left\{\begin{matrix} 2\mu r\pi \pm (\text{Bog. DF} - \text{Bog. CH}) \\ 2\mu r\pi \pm (\text{Bog. DF} + \text{Bog. CH}) \end{matrix}\right\},$$

während die in der letztern Zeile ausgedrückten Werthe auch so

$$2\mu r\pi \pm (r\pi - \text{Bog. CGED}),$$

also auch so

$$(2\mu+1) r\pi \pm \text{Bog. CGED}$$

geschrieben werden können, so daß nun alle Werthe zur Rechten in C ausgedrückt seyn würden durch

$$\left\{\begin{matrix} 2\mu r\pi \pm \text{Bog. CG} \\ (2\mu+1) r\pi \pm \text{Bog. CGED} \end{matrix}\right\};$$

und unter diesen Werthen ist kein einziger der Werthe des Integrals zur Linken in C.

Gerade dieselben Werthe

$$\left\{\begin{matrix} 2\mu r\pi \pm \text{Bog. CG} \\ (2\mu+1) r\pi \pm \text{Bog. CGED} \end{matrix}\right\}$$

hätte man auch erhalten, wenn man beide Grenzen des Integrals zur Rechten in C negativ genommen hätte.

Diejenigen der Werthe des Integrals zur Rechten in C, welche mit allen Werthen des Integrals zur Linken in C genau übereinstimmen, erhält man daher (in diesem Beispiele) dadurch, daß man die eine der Grenzen $\sqrt{r^2-a^2}$ und $\sqrt{r^2-b^2}$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ nimmt, die andere aber dann gleichzeitig $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$.

Daß aber das Integral zur Rechten in C mehr Werthe geben müsse, als das zur Linken, ließ sich voraussagen, weil solches nicht bloß $= \int\limits_{b \div (-a)} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx$, sondern auch $= \int\limits_{b \div a} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx$ ist, in die Augen fällt.

Nun hat aber dieses letztere Integral unendlich-viele Werthe, die alle durch

$$r \cdot \left(\frac{1}{sin} \frac{b}{r} - \frac{1}{sin} \frac{a}{r} \right)$$

d. h. durch

$$r \cdot \left(\left\{ \begin{matrix} 2\nu\pi + Arc\,sin \cdot \frac{b}{r} \\ (2\nu+1)\pi - Arc\,sin \cdot \frac{b}{r} \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 2\nu'\pi + Arc\,sin \cdot \frac{a}{r} \\ (2\nu'+1)\pi - Arc\,sin \cdot \frac{a}{r} \end{matrix} \right\} \right)$$

d. h. durch

$$r \cdot \left\{ \begin{matrix} 2\mu\pi \pm \left(Arc\,sin \cdot \frac{b}{r} - Arc\,sin \cdot \frac{a}{r} \right) \\ (2\mu+1)\pi \pm \left(Arc\,sin \cdot \frac{b}{r} + Arc\,sin \cdot \frac{a}{r} \right) \end{matrix} \right\}$$

d. h. durch

$$\left\{ \begin{matrix} 2\mu r\pi \pm \text{Bog. CG} \\ (2\mu+1) r\pi \pm \text{Bog. CGED} \end{matrix} \right\}$$

ausgedrückt sind; und dies sind in der That die übrigen Werthe, welche noch in dem Integral zur Rechten in C stecken.

Ferner bemerke man noch Folgendes:

Es ist (nach §. 35.) allemal

$$\int\limits_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_x \cdot dx = \int\limits_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} f_x \cdot dx;$$

und

$$\int_{\mathfrak{z}}^{Z} f_{(z)} \cdot \partial x_z \cdot dz = \int_{Z \div \mathfrak{z}} f_{(z)} \cdot \partial x_z \cdot dz.$$

Es wäre aber sehr unrichtig geschlossen, wenn man daraus, daß die beiden allgemein-bestimmten Integrale zur Rechten in diesen beiden Gleichungen einander gleich sind, folgern wollte, daß die beiden numerisch-bestimmten Integrale zur Linken, weil sie denen zur Rechten gleich sind, ebenfalls einander gleich seyn müssen; da beide vorstehenden Gleichungen nicht vollständige (vollkommene) Gleichungen sind, und jede nur ausdrückt, daß die Werthe zur Linken unter den (mehreren) Werthen zur Rechten vorkommen, so daß beide numerisch-bestimmten Integrale zur Linken (zwar auch einerlei aber auch) verschiedene (d. h. einander nicht gleiche) Werthe eines und desselben allgemein-bestimmten Integrals zur Rechten seyn können*).

Anmerkung 3. Es kommt auch noch, wenn $dx = \partial x_z \cdot dz$ gesetzt wird, die Frage in Betrachtung, ob dx und dz fortwährend beide unendlich-klein bleiben, welches offenbar nicht der Fall ist, wenn entweder ∂x_z oder

---

*) Ganz auf dieselbe Weise kann man aus den beiden richtigen aber unvollkommenen Gleichungen

$$a = \sqrt{a^2} \quad \text{und} \quad -a = \sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2}$$

nicht folgern, daß $a = -a$ seyn müsse, obgleich die beiden Quadrat-Wurzeln zur Rechten einander vollkommen gleich sind.

Ganz auf dieselbe Weise kann man aus den beiden richtigen aber unvollkommenen Gleichungen

$$2\,log\,a = log\,(a^2)$$
$$2\,log\,(-a) = log\,((-a)^2) = log\,(a^2)$$

nicht folgern, daß $2\,log\,(-a) = 2\,log\,a$ d. h. $log(-a) = log\,a$ ist, obgleich beide Logarithmen zur Rechten der beiden gegebenen Gleichungen einander vollkommen gleich sind.

∂z_x innerhalb der Grenzen einen unendlich-großen Werth annimmt.

Davon jedoch ein anderes Mal.

§. 37.

Gehen wir nun weiter die Formeln durch, welche in den §§. 17—20. für allgemein-bestimmte Integrale hingestellt und erwiesen wurden, und in denen alle Buchstaben noch ganz allgemein, bloße Träger der Operationen sind, und sehen wir zu, ob und unter welchen Voraussetzungen die übrigen analogen Formeln auch für numerisch-bestimmte Integrale gelten, d. h. für solche Integrale, in denen nur reelle Werthe, also nicht mehr allgemeine Ausdrücke vorkommen.

Es ist aber noch, analog dem §. 17.

$$1)\quad \partial\Big(\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_{x,z}\cdot dx\Big)_z = \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} (\partial f_z)\cdot dx,$$

$$2)\quad \int_{\mathfrak{z}}^{Z}\Big(\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_{x,z}\cdot dx\Big)\cdot dz = \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}}\Big(\int_{\mathfrak{z}}^{Z} f_{x,z}\cdot dz\Big)\cdot dx,$$

wenn nur in beiden Formeln die Grenzen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ nicht mehr von z abhängen, und in der 2) auch $\mathfrak{z}$ und Z nicht mehr von x; wenn ferner die numerisch-bestimmten Integrale wirklich existiren, wenn also $f_{x,z}$ so wie ∂f_z innerhalb der Grenzen der Integrale, d. h. für Werthe von x und z, welche bezüglich zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$, und zwischen $\mathfrak{z}$ und Z liegen, ihre Stetigkeit entweder gar nicht, oder doch nur auf die im §. 33. Nr. 2. bestimmte Weise unterbrechen*).

---

*) So würde z. B. die Gleichung

Ad 1. Die 1) folgt unmittelbar daraus, daß das Integral $\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_{x,z} \cdot dx$ eine Summe von unendlich-vielen Werthen von $f_{x,z} \cdot dx$ ist, für alle Werthe von x zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$, und daß es einerlei ist, ob man eine Summe differenziirt, oder jeden einzelnen Summanden, wenn nur von diesen letztern Resultaten wieder die Summe genommen wird und solche einen endlichen Werth hat.

Ad 2. Die 2) folgt unmittelbar daraus, daß es einerlei ist, in welcher Ordnung die unendlich-mal unendlich-vielen Werthe addirt werden, welche $f_{x,z} \cdot dx \cdot dz$ für alle und unabhängig von einander gesetzten, bezüglich um die unendlich-kleinen dx und dz von einander verschiedenen Werthe von x und von z annimmt.

Wollte man die Nr. 3. des §. 17. auf numerisch-bestimmte Integrale übertragen (wo die Grenzen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ noch als Funktionen von z gedacht sind), so würde sie die Form annehmen

$$3) \quad \partial\left(\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_{x,z} \cdot dx\right)_{(z)} = \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} (\partial f_z) \cdot dx + f_{\mathfrak{X}} \cdot \partial \mathfrak{X}_z - f_{\mathfrak{x}} \cdot \partial \mathfrak{x}_z \cdot$$

Untersuchen wir nun, ob diese letztere Gleichung richtig ist.

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} \frac{z^2-x^2}{(z^2+x^2)^2} \cdot dx\right) \cdot dz = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} \frac{z^2-x^2}{(z^2+x^2)^2} \cdot dz\right) \cdot dx$$

schon nicht wahr seyn; allein die Funktion $\frac{z^2-x^2}{(z^2+x^2)^2}$ unterbricht auch für $x = z = o$, welche Werthe zwischen den Grenzwerthen bezüglich von x und von z liegen, ihre Stetigkeit, und zwar auf die in Nr. 3. des §. 33. aufgeführte Weise. (Vgl. §. 18. Anmerk.)

In dieser Formel soll links eine Summe von unendlich-vielen Summanden, — deren jeder durch

$$(\sigma)\cdots \quad f_{\mathfrak{x}+\frac{\nu}{n}(\mathfrak{X}-\mathfrak{x}),z}\cdot dx$$

vorgestellt ist, während man $dx = \frac{\mathfrak{X}-\mathfrak{x}}{n}$, dabei n unendlich-groß und $\frac{\nu}{n}$ zwischen o und 1 sich denkt, — nach allem z, also auch nach dem z, welches in dem augenblicklichen Werthe von x, nämlich in $\mathfrak{x}+\frac{\nu}{n}(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})$ steckt, differenziirt werden, während der unendlich-kleine Faktor $dx\left(=\frac{\mathfrak{X}-\mathfrak{x}}{n}\right)$ selbst als eine Funktion von z angesehen werden muß. Statt die ganze Summe zu differenziiren, kann man aber jeden einzelnen durch den Ausdruck (σ) vorgestellten Summanden differenziiren (nach a l l e m z) und man erhält

$$(\ddagger)\cdots \quad \partial f_z\cdot dx + \partial f_{\mathfrak{x}+\frac{\nu}{n}(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})}\cdot\left[\partial\mathfrak{x}_z+\frac{\nu}{n}(\partial\mathfrak{X}_z-\partial\mathfrak{x}_z)\right]\cdot dx$$

$$+ f_{\mathfrak{x}+\frac{\nu}{n}(\mathfrak{X}-\mathfrak{x}),z}\cdot\frac{\partial\mathfrak{X}_z-\partial\mathfrak{x}_z}{n}$$

wenn man nur statt ν wieder o und jede positive Zahl von 1 bis n setzt, und zuletzt alles addirt; — also kann man $\frac{\nu}{n}=w$, $\frac{1}{n}=dw$ und dann statt w nach und nach alle positiven um $\frac{1}{n}=dw$ von einander verschiedenen Werthe setzen von $w=o$ bis $w=1$ und zuletzt alles addiren, um das zu erhalten, was der Ausdruck zur Linken in 3) vorstellt.

Das erste Glied des Ausdrucks $(\ddagger)$ giebt dann $\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}}(\partial f_z)\cdot dx$.

Die beiden andern Glieder des Ausdrucks $(\ddagger)$ schreiben sich so:

$$(\mathfrak{C})\cdots\quad \partial f_{\mathfrak{x}+w.(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})}\cdot[\partial\mathfrak{x}_z+w(\partial\mathfrak{X}_z-\partial\mathfrak{x}_z)](\mathfrak{X}-\mathfrak{x})\cdot dw$$
$$+f_{\mathfrak{x}+w.(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})}\cdot(\partial\mathfrak{X}_z-\partial\mathfrak{x}_z)\cdot dw;$$

und die verlangte Summe dieser Glieder findet man (nach §. 32. §. 35.), wenn man diesen Ausdruck nach w integrirt und das Integral von $w=o$ bis $w=1$ nimmt. Das Integral (nach w) von dem ersten Theil dieses Ausdruckes ($\mathfrak{C}$) ist aber, wenn man $\mathfrak{x}+w\cdot(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})=\mathfrak{z}$, also $(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})\cdot dw=d\mathfrak{z}$ setzt und dann theilweise integrirt, —

$$=f_{\mathfrak{x}+w.(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})}\cdot[\partial\mathfrak{x}_z+w\cdot(\partial\mathfrak{X}_z-\partial\mathfrak{x}_z)]$$
$$-\int f_{\mathfrak{x}+w.(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})}\cdot(\partial\mathfrak{X}_z-\partial\mathfrak{x}_z)\cdot dw;$$

also erhält man, wenn man dieses Integral von $w=o$ bis $w=1$ nimmt, für die Summe der erstern Glieder in $\mathfrak{C}$ sogleich

$$(f_{\mathfrak{X}}\cdot\partial\mathfrak{X}_z-f_{\mathfrak{x}}\cdot\partial\mathfrak{x}_z)-\int_o^1 f_{\mathfrak{x}+w.(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})}\cdot(\partial\mathfrak{X}_z-\partial\mathfrak{x}_z)\cdot dw.$$

Der zweite Theil in $\mathfrak{C}$ giebt dagegen den zweiten Theil des eben erhaltenen Resultats mit dem + Zeichen versehen, so daß die ganze aus $\mathfrak{C}$ hervorgehende Summe

$$=f_{\mathfrak{X}}\cdot\partial\mathfrak{X}_z-f_{\mathfrak{x}}\cdot\partial\mathfrak{x}_z$$

wird.

So sieht sich also die Nr. 3) ebenfalls außer Zweifel gestellt.

Die Formeln Nr. 4. und 5 des §. 19. gehen in folgende über:

$$4)\quad \int_\alpha^\beta f\cdot dx+\int_\beta^\gamma f\cdot dx=\int_\alpha^\gamma f\cdot dx,$$

also auch $\displaystyle\int_\alpha^\gamma f\cdot dx-\int_\beta^\gamma f\cdot dx=\int_\alpha^\beta f\cdot dx$

und auch $\int_\alpha^\gamma f\cdot dx - \int_\alpha^\beta f\cdot dx = \int_\beta^\gamma f\cdot dx$;

$$5)\quad \int_\alpha^\beta f\cdot dx + \int_\beta^\gamma f\cdot dx + \int_\gamma^\delta f\cdot dx = \int_\alpha^\delta f\cdot dx,$$

wo aber α, β, γ, δ reell gedacht werden müssen. — Ist $\alpha<\beta<\gamma<\delta$, so verstehen sich diese Formeln von selbst unmittelbar aus dem Begriff des §. 32. — Sollten aber in diesen Integralen untere Grenzen größer seyn als obere, so würde natürlich der erweiterte Begriff des §. 35. eintreten müssen und die Formel

$$6)\quad \int_\beta^\gamma f\cdot dx = -\int_\gamma^\beta f\cdot dx$$

dazu, damit die Richtigkeit dieser Formeln 4) und 5) behauptet und erwiesen werden könnte. — Die 6) folgt aber aus der im §. 35. erweiterten Definition des numerisch-bestimmten Integrals unmittelbar.

Analog der Nr. 7. des §. 19. folgt aber auch hier noch aus der Gleichung

$$\int f_x\cdot dx = \varphi_x + \int \psi\cdot dx$$

sogleich, wenn α und β reell sind,

$$7)\quad \int_\alpha^\beta f\cdot dx = \varphi_\beta - \varphi_\alpha + \int_\alpha^\beta \psi\cdot dx.$$

Denn es ist nach der Voraussetzung

$$f\cdot dx = \partial\varphi_x\cdot dx + \psi\cdot dx$$

also auch (nach §. 36. II.)

$$\int_\alpha^\beta f\cdot dx = \int_\alpha^\beta \partial\varphi_x\cdot dx + \int_\alpha^\beta \psi\cdot dx,$$

wodurch das Behauptete sich außer Zweifel gesetzt steht.

§. 38.

Weil aber die Formel §. 17. IV., auf numerisch-bestimmte Integrale übertragen, nicht oder doch nur mit großer Einschränkung gilt, so werden auch alle in §. 17. IV. steckenden und im §. 20. aufgezählten besonderen Fälle derselben nur mit besonderer Vorsicht auf numerisch-bestimmte Integrale übertragen werden können.

Betrachtet man jedoch diese Formeln näher, so findet man, daß die Bedingung 1. oder 2. des §. 36., unter welcher die Formel IV. daselbst gilt, gerade in diesen besonderen Fällen von den Integralen zur Linken oder zur Rechten der Gleichheitszeichen (die nach z genommen gedacht werden müssen, wenn auch x statt z und dx statt dz geschrieben steht), erfüllt ist, und daß daher die nachstehenden Gleichungen wahr bleiben, nämlich:

1) $$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_x \cdot dx = \int_{\mathfrak{x}\pm a}^{\mathfrak{X}\pm a} f_{x\mp a} \cdot dx;$$

2) $$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_{x\pm a} \cdot dx = \int_{\mathfrak{x}\pm a}^{\mathfrak{X}\pm a} f_x \cdot dx;$$

3) $$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_x \cdot dx = \frac{1}{a} \int_{a\mathfrak{x}}^{a\mathfrak{X}} f_{x:a} \cdot dx;$$

4) $$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_x \cdot dx = a \cdot \int_{\mathfrak{x}:a}^{\mathfrak{X}:a} f_{ax} \cdot dx;$$

5) $$\int_{0}^{\mathfrak{X}} f_x \cdot dx = \int_{0}^{\mathfrak{X}} f_{\mathfrak{X}-x} \cdot dx;$$

6) $$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_x \cdot dx = \int_{o}^{\mathfrak{X}-\mathfrak{x}} f_{\mathfrak{X}-x} \cdot dx;$$

7) $$\int_{-\mathfrak{x}}^{a} f_x \cdot dx = \int_{-a}^{\mathfrak{x}} f_{-x} \cdot dx,$$

wenn nur a, so wie $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$, beliebig reell gedacht sind, und wenn die Bedingungen der Existenz der numerisch-bestimmten Integrale erfüllt sind, also auch unter der Voraussetzung, daß der im §. 35. verallgemeinerte Begriff des numerisch-bestimmten Integrals zu Grunde gelegt gedacht wird, nach welchem in f·dx der Faktor dx stets negativ gedacht werden muß, so oft die untere Grenze des Integrals $\int_{m}^{n} f \cdot dx$ größer als die obere ist.

Die weiteren Sätze des §. 20. endlich lassen sich so umschreiben:

I. Ist $f_x = f_{-x}$, so ist $\int_{-\alpha}^{+\alpha} f_x \cdot dx = 2\int_{o}^{\alpha} f_x \cdot dx$.

II. Ist $f_x = -f_{-x}$, so ist $\int_{-\alpha}^{+\alpha} f_x \cdot dx = o$.

Diese Sätze folgen unmittelbar aus dem Begriff der Summe, wenn man bedenkt, daß nach den Voraussetzungen je zwei vom Anfange und Ende gleich weit entfernte Werthe von f_x einander gleich sind, und in I. einerlei, in II. dagegen entgegengesetzte Vorzeichen haben, so daß die Summe je zweier vom Anfang und Ende gleich weit entfernter Werthe von $f_x \cdot dx$ in I. das Doppelte des einen, in II. dagegen der Null gleich wird.

Anmerkung. In den Anwendungen aller dieser Formeln muß man aber, wie bei jedem besonderen Rechnen,

alle Aufmerksamkeit auf die mehrdeutigen Ausdrücke richten, und in jedem besonderen Falle beurtheilen, welcher Werth der mehrdeutigen Formen jetzt, welcher nachher zu setzen ist, während man, so lange diese Entscheidung noch nicht erfolgen kann, d. h. so lange noch die Rechnungen ganz allgemein sind, die vieldeutigen Formen so respektiren muß, wie solches in der „Ersten Abhandlung" §§. 37. 41. 60. etc. festgesetzt ist.

§. 39.

Man kann nun den bereits im §. 35. erweiterten Begriff des numerisch-bestimmten Integrals noch einmal erweitern und ihn auf beliebige reelle und imaginäre Grenzen von der Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ oder $p+q\cdot i$ ausdehnen, wenn wir $\sqrt{-1}$ durch i bezeichnen wollen.

Wir verstehen zu dem Ende unter dem numerisch-bestimmten Integral

$$\int_{\alpha+\beta\cdot i}^{\gamma+\delta\cdot i} f_x\cdot dx$$

die Summe aller unendlich-vielen durch $f_x\cdot dx$ vorgestellten Produkte von der Form $P+Q\cdot i$, die man erhält, wenn man statt dx den Quotienten $\frac{(\gamma+\delta\cdot i)-(\alpha+\beta\cdot i)}{n}$ d. h. $\frac{\gamma-\alpha}{n}+\frac{\delta-\beta}{n}\cdot i$ setzt, dabei n unendlich-groß sich denkt, statt x aber nach und nach alle um dieses dx wachsende*) Werthe setzt, von $\alpha+\beta\cdot i$ an bis zu $\gamma+\delta\cdot i$ hin.

*) Das Wort „wachsend" in dem Sinne genommen, daß wenn $p+q.i$ einer der Werthe von x ist, dann $p+q.i+dx$ der nächst folgende seyn soll. In demselben Sinne hat man schon längst von negativen Zuwachsen gesprochen; hier kann aber dx auch ein imaginärer Zuwachs seyn. (Vgl. §. 31.)

In diesem allgemeineren Begriff stecken aber die besonderen Begriffe des §. 35. und (natürlich auch) des §. 32. als besondere Fälle.

§. 40.

Erlebt f_x für keinen der Werthe von x, welche zwischen $\alpha+\beta\cdot i$ und $\gamma+\delta\cdot i$ liegen (und welche durch

$$\alpha+\beta\cdot i,\ \alpha+\beta\cdot i+dx,\ \alpha+\beta\cdot i+2\cdot dx,\ \cdots\ \alpha+\beta\cdot i+(n-1)dx$$

ausgedrückt sind, während

$$dx=\frac{\gamma-\alpha}{n}+\frac{\delta-\beta}{n}\cdot i \text{ und } n=\infty \text{ und positiv gedacht ist)}$$

eine in der Rechnung unzulässige Form, und sind alle Werthe von f_x dabei reell oder imaginär, aber von der Form $p+q\cdot i$, so ist allemal

$$\int_{\alpha+\beta\cdot i}^{\gamma+\delta\cdot i} f_x\cdot dx = \int f_x\cdot dx_{\,(\gamma+\delta\cdot i)\div(\alpha+\beta\cdot i)},$$

d. h. das numerisch-bestimmte Integral ist dann allemal dem allgemein-bestimmten gleich.

Beweis. Geht man von dem Taylor'schen Lehrsatze

$$F_{x+h}-F_x=f_x\cdot h+\partial f_x\cdot\frac{h^2}{2!}+\partial^2 f_x\cdot\frac{h^3}{3!}+\cdots$$

aus, wo $F_x=\int f_x\cdot dx$, also $\partial F_x=f_x$ gedacht ist, und setzt man hier herein statt h allemal dx, und statt x nach und nach die Werthe $\alpha+\beta\cdot i$, $\alpha+\beta\cdot i+dx$, $\alpha+\beta\cdot i+2\cdot dx$, $\alpha+\beta\cdot i+3\cdot dx$, ... zuletzt $\alpha+\beta\cdot i+(n-1)\cdot dx$, so wie $dx=\frac{\gamma-\alpha}{n}+\frac{\delta-\beta}{n}\cdot i$ und zu gleicher Zeit $n=\infty$ und positiv, so erhält man eine unendliche Menge solcher Gleichungen, in denen die Ausdrücke rechts nach Potenzen des imaginären unendlich-kleinen dx fortlaufen, so daß (nach §. 31.) die höhern Potenzen gegen die niedrigeren außer Acht gelassen werden können.

Addirt man nun alle diese Gleichungen, so findet sich unser Lehrsatz erwiesen, selbst in dem Falle, wo in einer oder in einigen dieser unendlich vielen Gleichungen das Glied zur Rechten, statt des Faktors dx die Potenz $(dx)^{\mu}$ zum Faktor haben sollte, wo $\mu < 1$ ist. (Vgl. §. 32.)

§. 41.

Dieser Satz bleibt auch noch wahr

1) wenn f_x für $x = a + b \cdot i$ die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, während a zwischen α und γ, und b zwischen β und δ liegt, wenn nur $a + b \cdot i$ keiner der Werthe $\alpha + \beta \cdot i + \nu \cdot dx$ ist, d. h. wenn nur nicht

$$a + b \cdot i = \alpha + \beta \cdot i + \frac{\nu}{n}[(\gamma - \alpha) + (\delta - \beta) \cdot i]$$

ist, also wenn nur nicht gleichzeitig

$$a - \alpha = \frac{\nu}{n}(\gamma - \alpha) \text{ und } b - \beta = \frac{\nu}{n}(\delta - \beta)$$

d. h. also, wenn nur nicht gleichzeitig

$$\frac{a - \alpha}{b - \beta} = \frac{\gamma - \alpha}{\delta - \beta} = \frac{\gamma - a}{\delta - b}$$

ist.

Derselbe Satz bleibt aber auch noch wahr

2) wenn zwar die obere Voraussetzung und diese vorstehende Gleichung zugleich stattfinden, wenn nur dann f_x die Form $\dfrac{\psi_x}{[x - (a + b \cdot i)]^{\mu}}$ hat und $\mu < 1$ ist.

Entkleidet man nämlich den Beweis §. 33. seines geometrischen Gewandes und nimmt man noch den §. 31. zu Hilfe, so läßt sich derselbe Beweis leicht auf die hier gemachte Behauptung ausdehnen.

§. 42.

Es entsteht nun die Frage, ob für diese allgemeineren numerisch-bestimmten Integrale, deren Grenzen eben so gut reell als imaginär seyn können, dieselben Sätze noch gelten, welche wir kurz vorher (§§. 36—38.) für die numerisch-bestimmten Integrale mit reellen Grenzen hingestellt haben. — Gehen wir zu dem Ende diese eben angeführten §§. in dieser Beziehung durch.

Zuvörderst bleiben aber die Sätze §. 36. I.—III., welche lehren

a) daß man aus einem Integral den konstanten Faktor heraus rücken kann,

b) daß das Integral einer Summe der Summe der Integrale aller Summanden (zwischen denselben Grenzen genommen) gleich ist; endlich

c) daß und wie man das Integral eines Produkts auf eine analoge Weise umformt, wie solche für die allgemein-bestimmten Integrale durch das theilweise Integriren stattfindet;

auch für diese allgemeineren numerisch-bestimmten Integrale des §. 39. noch unverändert wahr, weil die dort gegebenen Beweise, hier wiederholt, noch immer Bündigkeit haben.

Die Formel IV. des §. 36. dagegen, nämlich

$$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_x \cdot dx = \int_{\mathfrak{z}}^{Z} f_{(z)} \cdot \partial x_z \cdot dz,$$

welche schon für reell gedachte Grenzen nur unter bedeutenden Einschränkungen zugelassen werden durfte, gilt auch jetzt für diese allgemeineren numerisch-bestimmten Integrale des §. 39. nur dann,

wenn die reellen Theile und die Faktoren der imaginären Theile der zu den Werthen von x gehörigen

Werthe von z innerhalb der Grenzen von x keine Maxima und keine Minima haben,

und dann noch nicht deshalb, weil links und rechts die einzelnen Summanden der Summen einander gleich sind, sondern weil unter der gemachten Voraussetzung jedes der beiden Integrale ein und derselbe Werth des allgemein-bestimmten Integrals $\int\limits_{\mathfrak{X}\div\mathfrak{x}} f_x \cdot dx$ seyn muß (nach §§. 40. 41.).

Die Sätze §. 37. Nr. 1—3., welche lehren, wie ein numerisch-bestimmtes Integral nach einem zweiten Veränderlichen differenziirt oder integrirt wird, und zwar wenn bei dem Differenziiren die Grenzen des Integrals diesen zweiten Veränderlichen nicht enthalten oder noch enthalten, finden für die allgemeineren numerisch-bestimmten Integrale des §. 39. deshalb noch Anwendung, weil die dortigen Beweise, hier wiederholt, noch Bündigkeit haben.

Der Satz §. 37. Nr. 6., nach welchem

$$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_x \cdot dx = -\int_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{x}} f_x \cdot dx$$

seyn muß, findet auch jetzt noch statt, weil nach der Definition des §. 39. in dem Integrale zur Rechten der Faktor dx das bedeutet, was in dem Integral zur Linken der Faktor dx, nur jedesmal noch mit dem vorgesetzten (—) Zeichen versehen; der Satz gilt also aus demselben Grunde, aus welchem

$$a+b+c+\cdots = -(-a-b-c-\cdots)$$

ist.

Die Sätze §. 37. Nr. 4. 5., welche lehren, wie ein numerisch-bestimmtes Integral in Theile zerlegt wird, die theils addirt, theils von einander subtrahirt, das erstere wieder geben, wie z. B. die Gleichung

$$\int_{\alpha+\beta\cdot i}^{\gamma+\delta\cdot i} f_x\cdot dx = \int_{\alpha+\beta\cdot i}^{p+q\cdot i} f_x\cdot dx + \int_{p+q\cdot i}^{\gamma+\delta\cdot i} f_x\cdot dx,$$

gelten auch jetzt noch für diese allgemeineren numerisch-bestimmten Integrale des §. 39., aber nicht aus dem Grunde, der im §. 37. geltend gemacht werden konnte, daß nämlich die Summanden zur Rechten in beiden Integralen zusammen dieselben wären, wie in dem Integral zur Linken; denn dieses ist hier nur dann der Fall, wenn $p+q\cdot i$ so zwischen $\alpha+\beta\cdot i$ und $\gamma+\delta\cdot i$ liegt, daß $p+q\cdot i = \alpha+\beta\cdot i + \frac{\nu}{n}\cdot[(\gamma-\alpha)+(\delta-\beta)i]$ d. h. wenn $\frac{p-\alpha}{q-\beta} = \frac{p-\gamma}{q-\delta}$ ist; während die vorstehende Gleichung auch noch wahr bleibt, wenn $p+q\cdot i$ ganz willkührlich gedacht wird. In diesem letztern Falle aber haben die 3 Faktoren dx in den 3 Integralen der vorstehenden Gleichung, 3 verschiedene Bedeutungen, da sie der Reihe nach

$$\frac{\gamma-\alpha}{n}+\frac{\delta-\beta}{n}\cdot i,\quad \frac{p-\alpha}{n'}+\frac{q-\beta}{n'}\cdot i \quad \text{und} \quad \frac{\gamma-p}{n''}+\frac{\delta-q}{n''}\cdot i$$

bedeuten (dem §. 39. zu Folge), während n, n', n'' positiv und unendlich-groß gedacht werden. Der Grund der Richtigkeit dieser Gleichungen ist vielmehr darin zu suchen, daß nach §§. 40. 41. jedes dieser Integrale einer Differenz zweier Ausdrücke gleich ist, und daß diese Differenzen zur Rechten so beschaffen sind, daß der Subtrahend der einen in der andern unverändert als Minuend auftritt.

Um den Sinn, in welchem diese Gleichungen §. 37. Nr. 4. 5. hier für diese allgemeineren numerisch-bestimmten Integrale des §. 39. gelten, noch deutlicher nachzuweisen, wollen wir noch das folgende ganz einfache Beispiel näher betrachten.

So ist z. B.

$$(\mathfrak{z})\cdots \quad \int_1^2 x^2\cdot dx = \int_1^{3-2\cdot i} x^2\cdot dx + \int_{3-2\cdot i}^2 x^2\cdot dx;$$

denn das erste Integral zur Rechten stellt die Summe vor

$$1\cdot dx+(1+dx)^2 dx+(1+2\cdot dx)^2\cdot dx+\cdots(1+(n-1)\cdot dx)^2\cdot dx,$$

während $dx=\frac{2-2\cdot i}{n}$ und $n=\infty$ ist. Diese Summe ist aber, wenn man wirklich quadrirt und wirklich addirt, =

$$n\cdot dx+2[1+2+3+\cdots+(n-1)]\cdot dx^2$$
$$+[1+4+9+16+\cdots+(n-1)^2]\cdot dx^3$$

d. h. $=n\cdot dx+n(n-1)\cdot dx^2+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\cdot dx^3$ *)

$$=n\cdot dx+\frac{n-1}{n}\cdot(n\cdot dx)^2+\tfrac{1}{6}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{2n-1}{n}\cdot(n\cdot dx)^3.$$

Weil aber $n=\infty$ ist, so ist $\frac{n-1}{n}=1$ und $\frac{2n-1}{n}=2$, und nun wird dieselbe Summe

$$=n\cdot dx+(n\cdot dx)^2+\tfrac{1}{3}(n\cdot dx)^3=(n\cdot dx)\cdot[1+n\cdot dx+\tfrac{1}{3}(n\cdot dx)^2];$$

während $n\cdot dx=2-2\cdot i$ ist, so daß dieselbe Summe wird

$$=(2-2\cdot i)\cdot[1+(2-2\cdot i)+\tfrac{1}{3}(2-2\cdot i)^2]$$
$$=-\frac{10}{3}-\frac{46}{3}\cdot i.$$

Das zweite bestimmte Integral zur Rechten in obiger Gleichung $(\mathfrak{z})$, nämlich $\int_{3-2\cdot i}^2 x^2\cdot dx$ stellt dagegen die Summe

$$(3-2\cdot i)^2\cdot dx+(3-2\cdot i+dx)^2\cdot dx+(3-2\cdot i+2\cdot dx)^2\cdot dx+\cdots$$
$$+(3-2\cdot i+(n-1)\cdot dx)^2\cdot dx$$

vor, welche gleich ist der Summe

---

*) Die Summe der ersten n Quadratzahlen ist bekanntlich $=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$.

$$n\cdot(3-2\cdot i)^2\cdot dx+2(3-2\cdot i)[1+2+3+\cdots+(n-1)]\cdot dx^2$$
$$+[1+4+9+16+\cdots+(n-1)^2]\cdot dx^3$$
$$=(3-2\cdot i)^2\cdot n\cdot dx+(3-2\cdot i)(n-1)n\cdot dx^2+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\cdot dx^3$$

während $n\cdot dx=2-(3-2\cdot i)=-1+2\cdot i$ ist. Substituirt man aber diesen Werth statt $n\cdot dx$, indem man zugleich statt $n-1$ und $2n-1$ bezüglich n und $2n$ schreibt (da $n=\infty$ ist), so erhält man als Endresultat die gedachte Summe $=\frac{17}{3}+\frac{46}{3}\cdot i$. Der Ausdruck zur Rechten in der Gleichung (♃) ist daher

$$=(-\frac{10}{3}-\frac{46}{3}\cdot i)+(\frac{17}{3}+\frac{46}{3}\cdot i)$$

d. h. $=\frac{7}{3}$; und gerade dasselbe giebt die Summe $\int_1^2 x^2\cdot dx$ zur Linken in der Gleichung (♃).

Was im §. 38. gesagt ist, gilt auch hier, so daß die Formeln des §. 38. auch für die allgemeineren numerisch-bestimmten Integrale des §. 39. noch gelten, in denen alle darin vorkommenden Buchstaben imaginäre oder reelle Werthe von der Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ vorstellen.

Schließlich also erkennen wir, daß alle Formeln der §§. 36., 37. und 38., wie sie für die im §. 35. definirten numerisch-bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen stattfinden, allemal auch gelten, wenn die numerisch-bestimmten Integrale in dem allgemeineren Sinn des §. 39. aufgefaßt werden, so daß die Grenzen derselben und auch die übrigen vorkommenden Buchstaben und Ausdrücke beliebig reell oder imaginär (aber von der Form $p+q\cdot i$) seyn können.

Anmerkung. Trotz der großen Allgemeinheit der numerisch-bestimmten Integrale des §. 39., welche die des §. 35. (und also auch die des §. 32.) zwischen reellen Gren-

zen, als besondere Fälle in sich schließen, sind diese numerisch-bestimmten Integrale des §. 39., obgleich sie allemal allgemein-bestimmten Integralen (nach §§. 40. 41.) gleich sind, mit letzteren doch nie zu verwechseln. Letztere (nämlich die allgemein-bestimmten Integrale des §. 16.) sind allgemeine Rechnungsformen, bei denen man sich um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben deshalb gar nicht zu bekümmern braucht, weil diese Buchstaben bei dem allgemeinen Rechnen, in so fern dasselbe nur nach den durch das Verhalten der Operationen zu einander bedingten Gesetzen geschieht, ganz inhaltlos gedacht werden. — Auch giebt es eine sehr wichtige Formel (§. 17. IV. §. 36. IV.), welche für die numerisch-bestimmten Integrale des §. 39. nicht allemal, für die allgemein-bestimmten des §. 16. dagegen allemal wahr ist.

Fünftes Kapitel.

Von den numerischen unendlichen Reihen und von den numerisch-bestimmten Integralen mit unendlich-großen Grenzen.

§. 43.

1) Eine numerische unendliche Reihe nannten wir (siehe „Erste Abhandlung" pag. 86.*) konvergent, wenn von irgend einem Gliede ab die Summe einer unbestimmten Anzahl n auf einander folgender Glieder eine Funktion S_n von n giebt, welche für $n = \infty$ die Form $u + v \cdot \sqrt{-1}$ annimmt, während jedoch u und v nicht unendlich-groß werden und

*) An der citirten Stelle fehlen hinter den Worten (b. Zeile 4.) „unendlich-groß werden" noch die Worte „oder unbestimmt bleiben" (s. ebend. pag. 88. Note).

auch nicht unbestimmt bleiben. — Wir betrachten hier zunächst nur Reihen mit lauter reellen Gliedern.

Danach zeigt sich die geometrische Reihe

$$p+px+px^2+px^3+px^4+ \text{ in inf.}$$

konvergent, wenn $x<1$ ist, aber von der 1 doch noch um etwas endliches, wenn auch noch so kleines abliegt; dagegen ist dieselbe Reihe divergent, so oft $x=1$ oder der Einheit unendlich-nahe kommt, und auch so oft $x>1$ ist.

Denn die Summe von n ersten Gliedern dieser Reihe zeigt sich $=p\cdot\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=p\cdot\frac{1}{1-x}-p\cdot\frac{x^{n+1}}{1-x}$, und der letztere Theil $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ wird für $n=\infty$ unendlich-klein, wenn $x<1$, dagegen unendlich-groß, wenn $x>1$ ist. Für $x=1$ nimmt diese Summe zunächst die Form $\frac{0}{0}$ an, dann aber zeigt sich dieselbe für $n=\infty$ selbst $=\infty$ *).

2) Wird die Summe von n auf einander folgenden Gliedern einer unendlichen Reihe U durch S_n bezeichnet und durch E_n die Summe aller übrigen Glieder (welche auch das Ergänzungs-Glied genannt wird), so folgt, daß wenn die Reihe U konvergent ist, dann das Ergänzungs-Glied E_n für $n=\infty$ unendlich-klein werden muß, und daß dieser Satz auch umgekehrt gilt. — Auch muß bei einer konvergenten Reihe U, das n^{te} Glied u_n für $n=\infty$ ebenfalls unendlich-klein werden. Dieser letztere Satz gilt aber nicht umgekehrt, d. h. wenn das n^{te} Glied u_n auch unendlich-klein wird, so kann man daraus noch nicht folgern, daß die Reihe U konvergent seyn müsse.

---

*) Ist nämlich $x>1$, so ist $x=1+z$, und ist $x<1$, so ist $x=\frac{1}{1+z}$ wo z positiv ist. Das Weitere folgt nun aus der Anwendung des binomischen Lehrsatzes.

So ist die einfache harmonische Reihe

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+d}+\frac{1}{a+2d}+\frac{1}{a+3d}+ \text{in inf.},$$

deren Glieder (wenigstens von einem gewissen Gliede ab) fortwährend kleiner und zuletzt unendlich-klein werden, allemal **divergent**, wie auch a und d genommen werden mögen, weil das Ergänzungs-Glied E_n offenbar nicht kleiner ist als die Summe von noch weiteren n Gliedern (von $\frac{1}{a+nd}$ an bis zu $\frac{1}{a+(2n-1)d}$ hin), also nicht kleiner als das n fache des kleinsten dieser Glieder, d. h. nicht kleiner als $\frac{n}{a+(2n-1)d}$ oder $\frac{1}{\frac{a-d}{n}+2d}$, während letzterer Ausdruck für $n=\infty$, $=\frac{1}{2d}$, also nicht unendlich-klein wird.

3) Wird aber das Ergänzungs-Glied E_n für $n=\infty$ nicht unendlich-klein, oder wird das n^{te} Glied u_n für $n=\infty$ nicht unendlich-klein, so ist die Reihe U divergent.

Die unendliche Reihe

$$Cos\,x + Cos\,2x + Cos\,3x + Cos\,4x + \text{in inf.}$$

gehört für jeden Werth von x zu den divergenten, weil das Glied $u_n = Cos\,nx$ für $n=\infty$ unbestimmt bleibt und nicht unendlich-klein wird.

4) Hat aber eine unendliche Reihe U, von einem Gliede u_r ab, immer fort kleiner werdende Glieder mit abwechselnden Vorzeichen, so ist diese Reihe U, d. h.

$$\cdots + u_r - u_{r+1} + u_{r+2} - u_{r+3} + u_{r+4} - \text{in inf.}$$

nothwendig konvergent; denn ihr Werth ist, vom Gliede u_r ab gerechnet, offenbar größer als $u_r - u_{r+1}$ und nothwendig kleiner als u_r, da sie

$= (u_r - u_{r+1}) + (u_{r+2} - u_{r+3}) + (u_{r+4} - u_{r+5}) +$ in inf.
und auch

$$= u_r - [(u_{r+1} - u_{r+2}) + (u_{r+3} - u_{r+4}) + \text{ in inf.}]$$

ist.

Und obgleich in diesem Falle die konvergente unendliche Reihe $u_r - u_{r+1} + u_{r+2} - u_{r+3} +$ etc. etc. der Form nach der Differenz der beiden unendlichen Reihen
$(u_r + u_{r+2} + u_{r+4} + \text{ in inf.}) - (u_{r+1} + u_{r+3} + u_{r+5} + \text{ in inf.})$
gleich ist, so wird man diese neue Form des Ausdrucks doch nur dann benützen können, wenn Minuend und Subtrahend konvergente unendliche Reihen sind, weil numerische und divergente unendliche Reihen in der Rechnung nie geduldet werden können.

5) Ist eine Reihe U, entweder wenn alle ihre Glieder positiv sind, oder nur deshalb konvergent, weil sie nicht lauter positive Glieder hat, so bleibt sie auch dann noch konvergent,

a) wenn ihre Glieder beliebig getheilt, die Theile aber nächst auf einander folgende Glieder der neuen Reihe V werden;

b) wenn in der Reihe U oder in der neuen Reihe V wiederum je beliebig viele nächst auf einander folgende Glieder zusammengefaßt werden. —

Denn in beiden Fällen bleibt das Ergänzungs-Glied E'_n oder E''_n der neuen Reihen für $n = \infty$ noch immer unendlich-klein.

6) In den Nr. 5. erwähnten Fällen behält auch die unendliche Reihe immer denselben Werth, d. h. die neuen Reihen haben denselben Werth wie die alten.

7) Würden aber in einer konvergenten Reihe mit nicht lauter positiven Gliedern, z. B. mit Gliedern, die abwechselnde Vorzeichen haben, die Glieder dergestalt in anderer Ordnung zusammengefaßt, daß auf je 3 nächst auf einander

folgende der positiven Glieder immer nur 2 nächst auf einander folgende der negativen Glieder gerechnet werden, so würde natürlich da, wo man die Reihe abbricht, der Werth der neuen Reihe um die Summe der zurückgelassenen negativen Glieder größer seyn, als der Werth der gegebenen Reihe; und da dies bei jedem n^{ten} Gliede, also auch wenn $n = \infty$, der Fall ist, und die Summe der zurückgelassenen negativen Glieder, obgleich jedes einzelne unendlich-klein ist, da die Anzahl derselben zuletzt unendlich-groß gedacht werden muß, einen endlichen Werth haben kann, so kann der Werth der neuen unendlichen Reihe um diesen endlichen Werth größer werden, als der Werth der alten.

So z. B. ist der Werth der unendlichen und konvergenten Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \text{ in inf.}$$

$= log\,2$; nimmt man aber dieselben Glieder so zusammen, wie so eben beispielsweise angenommen worden, so daß man die unendliche Reihe

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{17} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12}$$
$$+ \tfrac{1}{19} + \tfrac{1}{21} + \tfrac{1}{23} - \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \text{ in inf.}$$

hat, so ist der Werth der letztern $= log\,2 + \tfrac{1}{2} log\,\tfrac{3}{2} = log\,(\sqrt{6})$.

Und nimmt man von dieser obigen unendlichen Reihe gesetzmäßig je μ positive und dann immer ν der negativen Glieder, so ist der Werth dieser neuen Reihe $= log\,2 + \tfrac{1}{2} log\,\frac{\mu}{\nu}$, es mag $\mu > \nu$ oder $\mu < \nu$ oder $\mu = \nu$ seyn*). Ist aber $\mu = \nu$, so fällt der letztere Werth wieder mit $log\,2$ zusammen.

---

*) In der pro loco gedruckten Dissertation: De nonnullis seriebus infinitis summandis sind diese Resultate in dem engeren Kreise der U. von dem Vfr. durch den Druck verbreitet worden.

§. 44.

Ist a eine bestimmte endliche ganze oder gebrochene positive oder negative Zahl oder Null, und denken wir uns $k_1 > a$, $k_2 > k_1$, $k_3 > k_2$, $\cdots$ $k_\mu > k_{\mu-1}$, die Differenz $k_\mu - k_{\mu-1}$ aber für jedes μ nicht unendlich-groß, so zerlegt sich (nach §. 37. Nr. 5.), wenn man voraussetzt, daß φ_x für alle reellen Werthe von x zwischen a und b nur reelle endliche Werthe annimmt, oder doch die Stetigkeit nur auf die im §. 33. Nr. 2. erlaubte Weise unterbricht, — das numerisch-bestimmte Integral $\int_a^b \varphi_x \cdot dx$ so, daß man hat

$$(\mathfrak{C})\cdots \quad \int_a^b \varphi\cdot dx = \int_a^{k_1} \varphi\cdot dx + \int_{k_1}^{k_2} \varphi\cdot dx + \int_{k_2}^{k_3} \varphi\cdot dx + \cdots$$
$$+ \int_{k_{\mu-1}}^{k_\mu} \varphi\cdot dx + \int_{k_\mu}^{b} \varphi\cdot dx,$$

welche Reihe zur Rechten aus $\mu+1$ Gliedern besteht, während $k_\mu < b$ gedacht ist.

Dagegen ist, wenn $b = \infty$ gedacht wird,

$$(\odot)\cdots \quad \int_a^\infty \varphi\cdot dx = \int_a^{k_1} \varphi\cdot dx + \int_{k_1}^{k_2} \varphi\cdot dx + \int_{k_2}^{k_3} \varphi\cdot dx + \text{in inf.},$$

wenn die Werthe k_1, k_2, k_3, etc. etc. nach einem bestimmten, den obigen Bedingungen entsprechend gedachten Gesetz bis in's Unendliche fortgehen. Diese letztere unendliche Reihe zur Rechten ist nun entweder divergent, und dann heißt das Integral $\int_a^\infty \varphi\cdot dx$ ein divergentes, und es kann dann

von ihm in der Rechnung nicht weiter die Rede seyn *); — oder dieselbe unendliche Reihe zur Rechten in ⊙ ist eine konvergente, und dann hat das Integral $\int_a^\infty \varphi\cdot dx$, welches nun ein konvergentes heißt, einen bestimmten Werth, nämlich den Werth dieser konvergenten numerischen Reihe, und dieser Werth ist dann allemal dem Werthe des allgemein-bestimmten Integrals $\int_{\infty \div a} \varphi\cdot dx$ gleich. (Aus §. 32. in Verbindung mit §. 43. Nr. 5. 6.)**).

Beispiele. Das Integral $\int_0^\infty Sin\, x\cdot dx$ giebt, wenn

---

*) So lange man nicht das Gegentheil beweist, muß man es für möglich halten, daß, während das numerisch-bestimmte Integral $\int_a^\infty \varphi\cdot dx$ divergent ist, also gar keinen Werth hat und daher auch keinem anderen Ausdrucke gleich seyn kann, — das analoge allgemein-bestimmte Integral $\int_{\infty \div a} \varphi\cdot dx$ einen bestimmten reellen oder imaginären Werth annehmen könne. Aus dem Inhalte des nächst folgenden §. geht aber die Gewißheit vom Gegentheil hervor.

**) Andere Schriftsteller, namentlich Raabe in seiner schon mehrmal gelobten (Differential- und) Integral-Rechnung, dehnen den Begriff der Divergenz eines bestimmten Integrals auch auf den Fall aus, wo die Grenzen desselben alle beide endlich sind, während der Werth des Integrals (vielleicht imaginär, vielleicht) unendlich-groß ist, weil die zu integrirende Funktion innerhalb der Grenzen ihre Stetigkeit ändert. — Um nicht zwei ganz verschiedene Dinge mit einander zu verwechseln, sind wir hier gezwungen gewesen, die Begriffe der Konvergenz und Divergenz eines Integrals auf solche zu beschränken, deren eine Grenze wenigstens unendlich-groß ist.

man $\varkappa_1 = \frac{1}{2}\pi$, $\varkappa_2 = \pi$, $\varkappa_3 = \frac{3}{2}\pi$, $\varkappa_4 = 2\pi$, etc. etc. setzt, die unendliche Reihe

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Sin\,x \cdot dx + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} Sin\,x \cdot dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} Sin\,x \cdot dx + \text{in inf.}$$

d. h.

$$(Cos\,0 - Cos\,\tfrac{1}{2}\pi) + (Cos\,\tfrac{1}{2}\pi - Cos\,\pi) + (Cos\,\pi - Cos\,\tfrac{3}{2}\pi) + \text{in inf.}$$

d. h. $1 + 1 - 1 - 1 + \ldots;$

und da diese Reihe divergent ist, so hat $\int_0^{\infty} Sin\,x \cdot dx$ keinen Werth. — Dasselbe findet man für $\int_0^{\infty} Cos\,x \cdot dx$ *).

Das Integral $\int_0^{\infty} Sin(x^2) \cdot dx$ giebt dagegen, wenn man $\varkappa_1 = \sqrt{\pi}$, $\varkappa_2 = \sqrt{2\pi}$, $\varkappa_3 = \sqrt{3\pi}$, $\varkappa_4 = \sqrt{4\pi}$, etc. etc. nimmt, die unendliche Reihe

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} Sin(x^2) \cdot dx + \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} Sin(x^2) \cdot dx + \int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{3\pi}} Sin(x^2) \cdot dx + \cdots$$
$$+ \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} Sin(x^2) \cdot dx + \text{in inf.},$$

welche offenbar Glieder mit regelmäßig abwechselnden Zeichen hat, und von denen jedes folgende kleiner als das vorher=

---

*) Poisson und Raabe finden $\int_0^{\infty} Sin\,x.\,dx = 1$ und $\int_0^{\infty} Cos\,x.\,dx = 0$; diese Resultate werden aber jetzt allgemein als unrichtige anerkannt.

gehende ist, weil $\pm\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} Sin(x^2)\cdot dx$ der Inhalt einer Figur von der Form ABC (Fig. 5.) ist, in welcher die höchste Ordinate BD allemal $=1$, die Breite AC aber $=\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}$ also immer kleiner ist, je größer n wird. Also ist diese Reihe (nach §. 43. Nr. 4.) konvergent und demnach auch das numerisch-bestimmte Integral $\int_0^\infty Sin(x^2)\cdot dx$. — Dasselbe findet man für $\int_0^\infty Cos(x^2)\cdot dx$.

Setzt man $x^2=z$, so geht $\int Sin(x^2)\cdot dx$ in $\frac{1}{2}\int\frac{Sin\,z}{\sqrt{z}}\cdot dz$ über. Untersucht man nun das numerisch-bestimmte Integral $\int_0^\infty \frac{Sin\,z}{\sqrt{z}}\cdot dz$ hinsichtlich seiner Konvergenz, so findet man für dasselbe, wenn $x_1=\pi$, $x_2=2\pi$, $x_3=3\pi$, etc. etc. gesetzt wird, ebenfalls eine unendliche Reihe, die offenbar Glieder mit abwechselnden Vorzeichen hat, und die immer kleiner werden, weil $\sqrt{z}$ mit z zugleich immer fort wächst. Also findet sich auch dieses Integral konvergent*).

---

*) Obgleich übrigens die beiden Integrale $\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{Sin\,z}{\sqrt{z}}.dz$ und $\int_0^\infty Sin(x^2).dx$ aus einander dadurch hervorgehen, daß man $z=x^2$, oder $x=\sqrt{z}$, also $dz=2x.dx$ und $dx=\frac{1}{2}\frac{dz}{\sqrt{z}}$ setzt, so muß man doch die Konvergenz eines jeden einzeln und besonders beweisen, in so fern es an sich nicht ganz nothwendig ist, daß sie beide zugleich konvergent seyen, eben weil die Gleichungen

§. 45.

Werden die Werthe von f_x von einem gewissen Werth von x ab, für die wachsenden Werthe von x, immer kleiner und zuletzt unendlich-klein, dabei aber auch immer positiv, so ist

I. das numerisch-bestimmte Integral $\int_a^{\infty} f_x \cdot dx$ allemal konvergent oder divergent, je nachdem die unendliche Reihe

(C)… $f_c + f_{c+h} + f_{c+2h} + f_{c+3h} +$ in inf.,

in welcher c beliebig reell und h beliebig positiv gedacht sind, konvergent oder divergent ist.

II. Dagegen ist die Reihe C unter denselben Voraussetzungen allemal konvergent oder divergent, je nachdem das allgemein-bestimmte Integral $\int_{\infty \div a} f_x \cdot dx$ einen endlichen reellen Werth hat oder nicht.

Ad I. Es ist offenbar, — so lange φ_x mit den von $x = p$ bis $x = q$ wachsenden Werthen von x immer abnimmt (aber positiv bleibt), und $\frac{q-p}{\nu} = dx$, also $q - p = \nu \cdot dx$ und ν unendlich-groß gedacht wird, — die Summe $\int_p^q \varphi \cdot dx$, d. h. die Summe

$$\varphi_p \cdot dx + \varphi_{p+dx} \cdot dx + \varphi_{p+2.dx} \cdot dx + \cdots + \varphi_{q-dx} \cdot dx$$

$dz = 2x.dx$ und $dx = \frac{1}{2} \frac{dz}{\sqrt{z}}$ an den Grenzen, wo x und z beide unendlich-klein, oder wo beide unendlich-groß sind, dem widersprechen, was man sich unter dx oder dz vom Anfang bis zu Ende eines jeden der Integrale zu denken hat. — Ist aber die Konvergenz eines jeden einzeln erwiesen, dann ist der Werth beider ein und derselbe.

kleiner als dieselbe Summe, wenn statt aller Faktoren φ_p, φ_{p+dx}, $\varphi_{p+2.dx}$ etc. etc. immer nur der größeste φ_p derselben gesetzt wird, — dagegen größer als dieselbe Summe, wenn statt der nämlichen Faktoren immer nur der kleinste derselben oder etwas noch kleineres, nämlich φ_q, gesetzt wird; d. h. ist es allemal dann, weil die Anzahl der Glieder $=\nu$ und $\nu \cdot dx = q - p$ ist,

$$\int_p^q \varphi \cdot dx < \varphi_p \cdot (q-p) \quad \text{aber} \quad > \varphi_q \cdot (q-p).$$

Danach hat man, wenn $c+\mu h = b$ ein solcher Werth von x ist, von welchem ab die Werthe von f_x immer fort kleiner werden,

$$\int_b^{b+h} f_x \cdot dx < f_b \cdot h \quad \text{und} \quad > f_{b+h} \cdot h$$

$$\int_{b+h}^{b+2h} f_x \cdot dx < f_{b+h} \cdot h \quad \text{und} \quad > f_{b+2h} \cdot h$$

$$\int_{b+2h}^{b+3h} f_x \cdot dx < f_{b+2h} \cdot h \quad \text{und} \quad > f_{b+3h} \cdot h$$

u. s. w. f. in inf.

Addirt man diese unendlich-vielen Gleichungen und nimmt man an, daß die Reihe

a) $f_b + f_{b+h} + f_{b+2h} + f_{b+3h} + \cdots$

konvergent und ihr Werth $= s$ ist, so findet sich

$$\int_b^\infty f_x \cdot dx < s \cdot h, \quad \text{aber} > (s - f_b) \cdot h;$$

so daß also das numerisch-bestimmte Integral $\int_b^\infty f_x \cdot dx$, sobald die Reihe a) konvergent ist, einen bestimmten Werth

hat. Da nun die Reihen a) und $\mathfrak{C}$ zu gleicher Zeit konvergent oder divergent sind, und da wegen

$$\int_a^\infty f_x \cdot dx = \int_a^b f_x \cdot dx + \int_b^\infty f_x \cdot dx$$

auch die beiden Integrale $\int_b^\infty f_x \cdot dx$ und $\int_a^\infty f_x \cdot dx$ zu gleicher Zeit einen oder keinen Werth haben, so ist der Satz I. außer Zweifel gestellt.

Ad II. Bezeichnen wir $\int f \cdot dx$ durch ψ_x, so hat man nach dem Lagrange-Taylor'schen Lehrsatze (§. 25 I. oder §. 27. II.)

$$(\mathfrak{♂})\cdots \qquad \psi_{x+h} - \psi_x = f_{x+\vartheta h} \cdot h,$$

wo ϑ zwischen o und 1 liegt und unbestimmt ist. Werden nun von $x = b$ an bis $x = \infty$ alle Werthe von f_x immer fort kleiner und positiv und zuletzt unendlich-klein, so ist nothwendig (nach ♂)

$$\psi_{b+h} - \psi_b < f_b \cdot h \quad \text{aber} \quad > f_{b+h} \cdot h$$

$$\psi_{b+2h} - \psi_{b+h} < f_{b+h} \cdot h \text{ aber } > f_{b+2h} \cdot h$$

$$\psi_{b+3h} - \psi_{b+2h} < f_{b+2h} \cdot h \quad \text{aber} \quad > f_{b+3h} \cdot h$$

u. s. w. bis in's Unendliche fort.

Addirt man nun alle diese Ungleichungen, so erhält man

$$\varphi_\infty - \psi_b \quad \text{d. h.} \int_{\infty \div b} f \cdot dx$$

$$< (f_b + f_{b+h} + f_{b+2h} + f_{b+3h} + \text{in inf.}) \cdot h$$

aber $$> (f_{b+h} + f_{b+2h} + f_{b+3h} + \text{in inf.}) \cdot h.$$

Hat also das allgemein-bestimmte Integral $\int_{\infty \div b} f \cdot dx$ einen endlichen bestimmten Werth, so ist die Reihe

$(\mathfrak{z})\cdots \quad f_{b+h} + f_{b+2h} + f_{b+3h} + \text{in inf.}$

und daher auch die obige Reihe (C) nothwendig **konvergent.**

Ad I. und II. Ist daher die Reihe (C) und deshalb auch die nächst vorliegende Reihe ($\mathfrak{z}$) divergent, so hat das Integral $\int\limits_{\infty \div a} f \cdot dx$ und demnach auch das Integral $\int\limits_a^\infty f \cdot dx$ keinen bestimmten endlichen Werth; d. h. letzteres ist divergent. — Und umgekehrt: ist letzteres Integral divergent, oder hat das allgemein-bestimmte Integral $\int\limits_{\infty \div a} f \cdot dx$ keinen bestimmten endlichen reellen Werth, so müssen auch die Reihen ($\mathfrak{z}$) und (C) divergent seyn; weil, wenn eine dieser Reihen (also auch die andere) konvergent wäre, dann auch das numerisch-bestimmte Integral $\int\limits_a^\infty f \cdot dx$ konvergent seyn, und das allgemein-bestimmte Integral $\int\limits_{\infty \div a} f \cdot dx$ einen bestimmten reellen endlichen Werth haben müßte*).

§. 46.

Mittelst des Satzes II. §. 45. kann man sich leicht von der Konvergenz oder Divergenz einer großen Anzahl unend-

---

*) Als Zusatz zur Note des §. 44. geht hieraus noch hervor: daß, so oft das numerisch-bestimmte Integral $\int\limits_a^\infty f . dx$ divergent ist, dann das allgemein-bestimmte Integral $\int\limits_{\infty \div a} f . dx$ auch keinen bestimmten reellen und endlichen Werth haben könne. Es kann aber der Werth des letztern dann imaginär, oder reell und unendlich-groß werden.

licher Reihen überzeugen; z. B. der Reihen

$$\text{I.}\quad 1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^4}+\text{ in inf.}$$

$$\text{II.}\quad 1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}+\text{ in inf.}$$

$$\text{III.}\quad \frac{1}{2\cdot(\log 2)^m}+\frac{1}{3\cdot(\log 3)^m}+\frac{1}{4\cdot(\log 4)^m}+\text{ in inf.}$$

$$\text{IV.}\quad \frac{1}{2\cdot\log 2\cdot(\log\log 2)^m}+\frac{1}{3\cdot\log 3\cdot(\log\log 3)^m}+\text{ in inf.}$$

u. s. w. f., je nachdem man $f_x=\frac{1}{m^x}=m^{-x}$, oder $f_x=\frac{1}{x^m}=x^{-m}$, oder $f_x=\frac{1}{x\cdot(\log x)^m}$, oder $f_x=\frac{1}{x\cdot\log x\cdot(\log\log x)^m}$ nimmt. In diesen 4 Fällen bekommt man für $\int f_x\cdot dx$ bezüglich $\frac{-1}{m^x\cdot\log m}$, $\frac{x^{1-m}}{1-m}$, $\frac{(\log x)^{1-m}}{1-m}$, und $\frac{(\log\log x)^{1-m}}{1-m}$.

Diese Integrale nehmen aber für $x=\infty$ einen $\left\{\begin{matrix}\text{unendlich-großen}\\ \text{unendlich-kleinen}\end{matrix}\right\}$ Werth an, wenn $\left\{\begin{matrix}m<1\\ m>1\end{matrix}\right\}$ ist. Daher konvergiren die Reihen I—IV., so oft $m>1$ ist; sie divergiren dagegen, so oft man $m<1$ hat. — Für $m=1$ ergiebt die direkte Integration ebenfalls die Divergenz der Reihen.

Bei diesen Untersuchungen kann man aber, wie hier geschehen ist, die endliche Grenze a des allgemein-bestimmten Integrals allemal ganz außer Acht lassen, da sie willkührlich und allemal so genommen werden kann, daß das Integral $\int f\cdot dx$ für $x=a$ einen endlichen Werth annimmt.

(♁)... $f_{b+h} + f_{b+2h} + f_{b+3h} + \text{in inf.}$

und daher auch die obige Reihe (C) nothwendig konvergent.

Ad I. und II. Ist daher die Reihe (C) und deshalb auch die nächst vorliegende Reihe (♁) divergent, so hat das Integral $\int\limits_{\infty\div a} f\cdot dx$ und demnach auch das Integral $\int_a^{\infty} f\cdot dx$ keinen bestimmten endlichen Werth; d. h. letzteres ist divergent. — Und umgekehrt: ist letzteres Integral divergent, oder hat das allgemein-bestimmte Integral $\int\limits_{\infty\div a} f\cdot dx$ keinen bestimmten endlichen reellen Werth, so müssen auch die Reihen (♁) und (C) divergent seyn; weil, wenn eine dieser Reihen (also auch die andere) konvergent wäre, dann auch das numerisch-bestimmte Integral $\int_a^{\infty} f\cdot dx$ konvergent seyn, und das allgemein-bestimmte Integral $\int\limits_{\infty\div a} f\cdot dx$ einen bestimmten reellen endlichen Werth haben müßte*).

§. 46.

Mittelst des Satzes II. §. 45. kann man sich leicht von der Konvergenz oder Divergenz einer großen Anzahl unend-

*) Als Zusatz zur Note des §. 44. geht hieraus noch hervor: daß, so oft das numerisch-bestimmte Integral $\int_a^{\infty} f.dx$ divergent ist, dann das allgemein-bestimmte Integral $\int\limits_{\infty\div a} f.dx$ auch keinen bestimmten reellen und endlichen Werth haben könne. Es kann aber der Werth des letztern dann imaginär, oder reell und unendlich-groß werden.

licher Reihen überzeugen; z. B. der Reihen

$$\text{I.}\quad 1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^4}+\text{ in inf.}$$

$$\text{II.}\quad 1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}+\text{ in inf.}$$

$$\text{III.}\quad \frac{1}{2\cdot(\log 2)^m}+\frac{1}{3\cdot(\log 3)^m}+\frac{1}{4\cdot(\log 4)^m}+\text{ in inf.}$$

$$\text{IV.}\quad \frac{1}{2\cdot\log 2\cdot(\log\log 2)^m}+\frac{1}{3\cdot\log 3\cdot(\log\log 3)^m}+\text{ in inf.}$$

u. s. w. f., je nachdem man $f_x=\frac{1}{m^x}=m^{-x}$, oder $f_x=\frac{1}{x^m}=x^{-m}$, oder $f_x=\frac{1}{x\cdot(\log x)^m}$, oder $f_x=\frac{1}{x\cdot\log x\cdot(\log\log x)^m}$ nimmt. In diesen 4 Fällen bekommt man für $\int f_x\cdot dx$ bezüglich $\frac{-1}{m^x\cdot\log m}$, $\frac{x^{1-m}}{1-m}$, $\frac{(\log x)^{1-m}}{1-m}$, und $\frac{(\log\log x)^{1-m}}{1-m}$.

Diese Integrale nehmen aber für $x=\infty$ einen $\left\{\begin{matrix}\text{unendlich-großen}\\ \text{unendlich-kleinen}\end{matrix}\right\}$ Werth an, wenn $\left\{\begin{matrix}m<1\\ m>1\end{matrix}\right\}$ ist. Daher konvergiren die Reihen I—IV., so oft $m>1$ ist; sie divergiren dagegen, so oft man $m<1$ hat. — Für $m=1$ ergiebt die direkte Integration ebenfalls die Divergenz der Reihen.

Bei diesen Untersuchungen kann man aber, wie hier geschehen ist, die endliche Grenze a des allgemein-bestimmten Integrals allemal ganz außer Acht lassen, da sie willkührlich und allemal so genommen werden kann, daß das Integral $\int f\cdot dx$ für $x=a$ einen endlichen Werth annimmt.

§. 47.

Zur Vervollständigung dieser Lehren und auch Behufs der Anwendung des Lehrsatzes §. 45. I. wollen wir noch die, besonders von Gauß und Cauchy aufgestellten bekannten Sätze über die Konvergenz oder Divergenz der unendlichen Reihen in gedrängter Kürze hieher setzen.

Da nämlich die Auffindung der Summe einer unbestimmten Anzahl n von Gliedern, aus welcher man (nach §. 43.) auf die Konvergenz oder Divergenz einer numerischen unendlichen Reihe schließen könnte, meist unausführbar ist, so sucht man die Konvergenz oder Divergenz einer Reihe U, wenn nicht durch den Lehrsatz II. des §. 45., zunächst dadurch zu bestimmen, daß man sie mit einer andern unendlichen Reihe V vergleicht, die bereits als konvergent oder divergent anerkannt ist.

Denken wir uns nun zwei Reihen

U... u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, in inf.

und

V... v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, in inf.

aus lauter positiven Gliedern bestehend, so ist U mit V zugleich konvergent, wenn von irgend einem, wenn auch noch so großen aber endlichen Werthe k von r ab, bis $r=\infty$

$$\frac{u_{r+1}}{u_r} \leqq \frac{v_{r+1}}{v_r}$$

ist, d. h. wenn die Reihe U von dem Gliede u_k ab, an allen Stellen eben so schnell oder schneller noch abnimmt als die bereits als konvergent bekannte Reihe V. — Dagegen ist U mit V zugleich divergent, wenn für dieselben Werthe von r

$$\frac{u_{r+1}}{u_r} \geqq \frac{v_{r+1}}{v_r}$$

ist, d. h. wenn die Reihe U eben so langsam oder langsamer noch abnimmt, als die bereits als divergent bekannte Reihe V.

Ist daher k, wenn auch noch so groß aber endlich, und ist von $r = k$ an bis $r = \infty$

1) $\frac{u_{r+1}}{u_r} \overline{<} \frac{v_{r+1}}{v_r}$ oder $\frac{u_{r+1}}{u_r} \geqq \frac{v_{r+1}}{v_r}$

2) $\left(\frac{u_{r+1}}{u_r}\right)^r \overline{<} \left(\frac{v_{r+1}}{v_r}\right)^r$ oder $\left(\frac{u_{r+1}}{u_r}\right)^r \geqq \left(\frac{v_{r+1}}{v_r}\right)^r$

3) $\left(1 - \frac{u_{r+1}}{u_r}\right)r \overline{>} \left(1 - \frac{v_{r+1}}{v_r}\right)r$ oder

$$\left(1 - \frac{u_{r+1}}{u_r}\right)r \leqq \left(1 - \frac{v_{r+1}}{v_r}\right)r$$

4) $\left[\left(1 - \frac{u_{r+1}}{u_r}\right)r\right]^r \overline{>} \left[\left(1 - \frac{v_{r+1}}{v_r}\right)r\right]^r$ oder

$$\left[\left(1 - \frac{u_{r+1}}{u_r}\right)r\right]^r \leqq \left[\left(1 - \frac{v_{r+1}}{v_r}\right)r\right]^r,$$

so ist die Reihe U mit der Reihe V zugleich

konvergent oder divergent.

Nimmt man nun nach und nach die Reihen I—III. des §. 46. statt V, so erhält man aus der Anwendung der vorstehenden Nr. 1—4. noch folgende speciellere Sätze:

5) Die Reihe U ist konvergent, wenn $\frac{u_{r+1}}{u_r}$ für $r = k$ bis $r = \infty$ allemal um eine endliche, wenn auch noch so kleine Zahl, kleiner als 1 bleibt (aus der Vergleichung der U mit der geometrischen Reihe I. des §. 46.); sie ist divergent, so oft derselbe Quotient > 1 wird.

6) Sollte aber dieser Quotient $\frac{u_{r+1}}{u_r}$ für $r=\infty$ der Einheit gleich werden (ihr unendlich-nahe kommen), so wird man die Reihe U lieber mit der harmonischen Reihe II. des §. 46. vergleichen und man erhält:

Die Reihe U ist $\left\{\begin{matrix}\text{konvergent}\\ \text{divergent}\end{matrix}\right\}$, wenn $\left(\frac{u_{r+1}}{u_r}\right)^r$ von $r=k$ an bis $r=\infty$ der Potenz e^{-m} sich immer mehr nähert und ihr unendlich nahe kommt, und je nachdem dann $m \gtrless 1$ ist (aus Nr. 2. und weil $\left(1-\frac{1}{r+1}\right)^{rm}$ für $r=\infty$ der Potenz e^{-m} gleich wird, nach „Abhandlung I." pag. VII. der Vorrede).

7) Auch $\left\{\begin{matrix}\text{konvergirt}\\ \text{divergirt}\end{matrix}\right\}$ die Reihe U, je nachdem $\left(1-\frac{u_{r+1}}{u_r}\right)r$, von $r=k$ an bis $r=\infty$, $\gtrless 1$ bleibt; (aus Nr. 3. und aus der Vergleichung mit der Reihe II. des §. 46. und weil $\left[1-\left(1-\frac{1}{r+1}\right)^m\right]r$ für $r=\infty$ der Zahl m gleich wird).

8) Sollte dieser letztere Ausdruck für $r=\infty$ noch immer der Einheit unendlich-nahe kommen (d. h. $=1$ werden), so würde man lieber die Reihe U mit der III. des §. 46. vergleichen. Dann erhält man (aus Nr. 4.):

Ist $\left[r\cdot\left(1-\frac{u_{r+1}}{u_r}\right)\right]^r$ für $r=\infty$ nicht unendlich-groß, so ist die Reihe U divergent.

9) Aus der unmittelbaren Vergleichung der Reihe U mit der geometrischen Reihe $v+v^2+v^3+v^4+$ in inf. geht auch noch hervor, daß die Reihe U konvergirt, wenn für $r=k$ bis $r=\infty$, $u_r \leqq v^r$ und $v<1$, also wenn $\sqrt[r]{u_r}$ für $r=\infty$ noch <1 wird. — Dagegen divergirt dieselbe Reihe U, wenn $u_r \geqq v^r$ und $v \geqq 1$ ist, d. h. wenn $\sqrt[r]{u_r} \geqq 1$ wird (für $r=k$ bis $r=\infty$, wo k noch so groß aber endlich gedacht ist).

10) Vergleicht man die Reihe U mit der höheren harmonischen Reihe II. des §. 46., nämlich mit

$$1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+ \text{ in inf.},$$

welche konvergirt, wenn $m>1$, dagegen divergirt, wenn $m \leqq 1$ ist, so folgt, daß die Reihe U konvergirt, so oft für $r=k$ bis $r=\infty$, $u_r<(\frac{1}{r})^m$ und $m>1$ ist, d. h. so oft $\frac{log(\frac{1}{u_r})}{log\, r}>m>1$ ist. — Dieselbe Reihe U divergirt dagegen, so oft $\frac{log(\frac{1}{u_r})}{log\, r}<1$ ist (für $r=k$ bis $r=\infty$).

11) Die Anwendung dieser Sätze, namentlich der Nummern 1—8., giebt noch:

Die Reihe U, in welcher

$$u_r=\frac{a_0r^m+a_1r^{m-1}+a_2r^{m-2}+\cdots}{b_0r^n+b_1r^{n-1}+b_2r^{n-2}+\cdots}$$

ist, während weder im Zähler noch im Nenner dieses Ausdruckes negative Potenzen von r vorkommen, wo aber m und n beliebig ganz oder gebrochen gedacht sind, ist konver-

gent oder divergent, je nachdem $m < n - 1$ oder $m \overline{\gtrless} n - 1$ ist*).

Aus diesem Resultate, in Verbindung mit dem Satze §. 45 I., geht aber noch hervor, daß das numerisch-bestimmte Integral

$$\int_a^\infty \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots} \cdot dx,$$

in welchem unter dem $\int$ Zeichen keine negativen Potenzen von x vorkommen, weder im Zähler noch im Nenner, allemal konvergent ist, so oft $m < n - 1$, d. h. $n - m > 1$ ist; — dagegen divergent wird, so oft $m \overline{\gtrless} n - 1$, d. $n - m \overline{\lessgtr} 1$ ist, auch wenn m und n ganz oder gebrochen seyn sollten, vorausgesetzt, daß zwischen a und ∞ kein Werth liegt, welcher statt x gesetzt, den Nenner der zu integrirenden Funktion der Null gleich macht (§. 33.), d. h. also, wenn der Nenner lauter imaginäre oder doch nur solche reelle Faktoren $x - \alpha$ hat, in welchen $\alpha < a$ ist.

Deswegen sind die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \cdot dx, \quad \int_0^\infty \frac{1}{1+x\sqrt{x}} \cdot dx, \quad \int_0^\infty \frac{1}{(\sqrt{1+x})^3} \cdot dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}} \cdot dx$$

konvergent, während diese anderen

---

*) Es folgt dies auch schon daraus, daß die Glieder dieser Reihe mit den Gliedern einer harmonischen Reihe (II. des §. 46.) der $n - m^{ten}$ Ordnung desto mehr zusammenfallen, je größer ihre Stellenzahl wird, während letztere konvergirt oder divergirt, je nachdem $n - m > 1$ oder $n - m \overline{\lessgtr} 1$ ist.

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x}\cdot dx,\quad \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot dx,\quad \int_0^\infty \frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{(\sqrt[3]{1+x})^2}\cdot dx$$

divergent seyn müssen.

12) Ist die unendliche Reihe U so, daß man

$$\frac{u_{r+1}}{u_r}=\frac{r^h+A_1\cdot r^{h-1}+A_2\cdot r^{h-2}+\cdots+A_h}{r^h+B_1\cdot r^{h-1}+B_2\cdot r^{h-2}+\cdots+B_h}$$

hat, so ist

a) die Reihe U steigend, folglich divergent, wenn die erste der Differenzen A_1-B_1, A_2-B_2, A_3-B_3, ⋯, welche nicht mehr Null ist, positiv ist. — Ist dagegen dieselbe Differenz negativ, so ist die Reihe fallend, d. h. die Glieder nehmen fortwährend ab, und es kann daher nun noch untersucht werden, ob die Reihe konvergent ist oder nicht.

b) Ist A_1-B_1 positiv, so ist die Reihe U nicht bloß steigend, sondern die Glieder derselben werden auch zuletzt unendlich-groß. (Aus der Vergleichung der Reihe U mit einer Reihe V, in welcher $v_k=\frac{(u_k)^n}{k}$ ist, und n positiv und ganz; denn es wird dann

$$\frac{v_{r+1}}{v_r}=\frac{r}{r+1}\cdot\frac{r^{nh}+nA_1\cdot r^{nh-1}+\cdots}{r^{nh}+nB_1\cdot r^{nh-1}+\cdots}$$

also ist die Reihe V (nach a) auch noch steigend, so daß $u_k=\sqrt[n]{k\cdot v_k}$ mit k zugleich unendlich-groß wird.

c) Ist A_1-B_1 negativ, so werden die Glieder der Reihe zuletzt unendlich-klein. (Aus der Vergleichung der Reihe U mit einer Reihe V, in welcher $v_k=k\cdot(u_k)^n$ ist, und

n positiv ganz, indem man wie in b) weiter schließt).

d) Ist $A_1 - B_1 = o$, so nähern sich die Glieder der Reihe U, sie mögen wachsen oder abnehmen, einer bestimmten Grenze und werden also zuletzt weder unendlich-groß, noch unendlich-klein. (Aus der Vergleichung der Reihe U mit einer Reihe V, in welcher $v_k = (\frac{k}{k-1})^n \cdot u_k$ gedacht ist, im Falle die Reihe U steigend, — in welcher dagegen $v_k = (\frac{k-1}{k})^n \cdot u_k$ gedacht ist, im Falle die Reihe U fallend seyn sollte; denn es wird dann im erstern Falle

$$\frac{v_{r+1}}{v_r} = \frac{r^{2n+h} + A_1 \cdot r^{2n+h-1} + (A_2 - B_2) \cdot r^{2n+h-2} + \cdots}{r^{2n+h} + B_1 \cdot r^{2n+h-1} + B_2 \cdot r^{2n+h-2} + \cdots}$$

so daß man n immer so groß positiv nehmen kann, daß (nach a) die Reihe V fallend wird, während doch immer fort $u_r < v_r$ bleibt; analog im andern Falle.

So wachsen die Glieder der Reihe

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} + \frac{\alpha^{2|1} \cdot \beta^{2|1}}{2! \gamma^{2|1}} + \frac{\alpha^{3|1} \cdot \beta^{3|1}}{3! \gamma^{3|1}} + \frac{\alpha^{4|1} \cdot \beta^{4|1}}{4! \gamma^{4|1}}, \ldots *)$$

und werden zuletzt unendlich-groß, wenn $\alpha + \beta > \gamma + 1$; sie nehmen ab und werden zuletzt unendlich-klein, wenn $\alpha + \beta < \gamma + 1$ ist; und dieselben Glieder nähern sich einer bestimmten endlichen Grenze, wenn $\alpha + \beta = \gamma + 1$ seyn sollte, während dabei die Reihe noch steigend oder fallend ist, je nachdem $\alpha\beta > \gamma$ oder $\alpha\beta < \gamma$ ausfällt.

So findet sich auch, daß die Glieder der Reihe

---

*) Unter $\alpha^{n|1}$ verstehen wir das Produkt von n Faktoren $\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+(n-1))$, deren erster α ist und von denen jeder folgende um 1 wächst.

$$1+\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\alpha^{2|1}}{\gamma^{2|1}}+\frac{\alpha^{3|1}}{\gamma^{3|1}}+\text{ in inf.}$$

zuletzt unendlich-groß oder unendlich-klein werden, je nachdem $\alpha > \gamma$ oder $\alpha < \gamma$ ist.

e) Diese Reihe U ist endlich nur dann konvergent, wenn $A_1+1 < B_1$, d. h. $A_1 < B_1 - 1$, oder wenn A_1+1-B_1 noch negativ ist.

Wegen des Beweises dieser letzteren Behauptung lese man die Abhandlung des Gauß: Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc. etc. Sect. 3. in den Comment. soc. reg. scient. Gott. recent. Vol. II., aus welcher wir diese Nr. 12. entnommen haben, selbst nach.

Daher konvergirt die Reihe

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}+\frac{\alpha^{2|1}\cdot\beta^{2|1}}{2!\gamma^{2|1}}+\frac{\alpha^{3|1}\cdot\beta^{3|1}}{3!\gamma^{3|1}}+\text{ in inf.}$$

nur dann, wenn $\alpha+\beta < \gamma$ ist; und die Reihe

$$1+\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\alpha^{2|1}}{\gamma^{2|1}}+\frac{\alpha^{3|1}}{\gamma^{3|1}}+\frac{\alpha^{4|1}}{\gamma^{4|1}}+\text{ in inf.}$$

nur dann, wenn $\alpha < \gamma - 1$ oder $\alpha + 1 < \gamma$ ist.

§. 48.

I. Man kann sich auch numerisch-bestimmte Integrale mit einer negativen, aber, abgesehen vom Vorzeichen, unendlich-großen Grenze denken, z. B. $\int_{-\infty}^{a} f_x \cdot dx$, und man kann sich dieses Integral auch wieder in eine unendliche Reihe einzelner bestimmter Integrale zerlegt denken, welche rückwärts gelesen in's Unendliche fortgeht (oder, wie man auch sagen kann, aus dem Unendlichen kommt) und dabei konvergent oder di-

vergent ist, welche man aber auch in umgekehrter Ordnung geschrieben sich denken kann. Ist nun diese Reihe, also das Integral selbst, konvergent, so ist solches (nach §. 38. Nr. 7.) $=\int_{-a}^{\infty} f_{-x}\cdot dx$, also auch $=\int_{\infty \div (-a)} f_{-x}\cdot dx$, und daher (nach §. 20. Nr. 7.) auch $=\int_{a \div (-\infty)} f_x\cdot dx$. Ist aber dieses Integral divergent, hat es also keinen bestimmten endlichen reellen Werth, so kann solcher, der gar nicht existirt, auch keinem andern Ausdrucke gleich seyn wollen.

II. Endlich kann man sich noch ein numerisch-bestimmtes Integral denken zwischen zwei unendlich-großen Grenzen, $-\infty$ und $+\infty$, z. B. $\int_{-\infty}^{\infty} f\cdot dx$. — Hat solches einen endlichen bestimmten Werth (d. h. ist solches konvergent), so ist derselbe offenbar $=\int_{-\infty}^{a} f\cdot dx + \int_{a}^{\infty} f\cdot dx$, also auch $=\int_{a \div (-\infty)} f\cdot dx + \int_{\infty \div a} f\cdot dx$; folglich auch $=\int_{\infty \div (-\infty)} f\cdot dx$. — Hat aber das gedachte numerisch-bestimmte Integral gar keinen Werth (d. h. ist es divergent), so kann auch von dessen Auswerthung (durch ein allgemein-bestimmtes Integral) nicht weiter die Rede seyn.

Ein solches numerisch-bestimmtes Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x\cdot dx$ zwischen zwei unendlich-großen Grenzen ist endlich allemal konvergent, wenn jedes der beiden Integrale $\int_{-a}^{\infty} f_{-x}\cdot dx$ und $\int_{a}^{\infty} f_x\cdot dx$ konvergent ist; dasselbe Integral ist divergent, so oft eines der beiden letztern divergent ist.

Anmerkung 1. Ueberall ist hier vorausgesetzt worden, daß bei den numerisch-bestimmten Integralen $\int_a^{\infty} f \cdot dx$, $\int_{-\infty}^{a} f \cdot dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f \cdot dx$ die Funktion f_x innerhalb der Grenzen des Integrals immerfort reelle Werthe hat und ihre Stetigkeit entweder gar nicht unterbricht, oder doch nur in der Form $\frac{\psi_\alpha}{o^\mu}$, während $\mu < 1$ ist (vgl. §. 33.).

Anmerkung 2. Es ist für die Anwendungen noch wichtig, daß man nun auch den Fall untersuche, wo in dem allgemeineren numerisch-bestimmten Integral

$$\int_{\alpha+\beta\cdot i}^{\gamma+\delta\cdot i} f \cdot dx$$

die obere Grenze $\gamma+\delta\cdot i$ sich dergestalt umändert, daß entweder 1) $\gamma=\infty$ und gleichzeitig $\delta=\infty$ wird, oder 2) γ endlich oder o und $\delta=\infty$, oder 3) $\gamma=\infty$ und δ endlich oder o. — Dies mag nun in dem Folgenden geschehen.

§. 49.

Denkt man sich in der Formel C des §. 44.

$$(\mathrm{C}) \cdots \int_a^b f \cdot dx = \int_a^{k_1} f \cdot dx + \int_{k_1}^{k_2} f \cdot dx + \int_{k_2}^{k_3} f \cdot dx + \cdots + \int_{k_\mu}^{b} f \cdot dx,$$

$$a=\alpha+\beta\cdot i,\ b=\gamma+\delta\cdot i,\ k_\nu=\alpha+\beta\cdot i+\frac{\nu}{n}[(\gamma-\alpha)+(\delta-\beta)\cdot i],$$

so wird jedes einzelne der $\mu+1$ Glieder zur Rechten des $=$ Zeichens auf die Form $P+Q\cdot i$ gebracht werden können. Denkt man sich nun $\gamma=\infty$, und zugleich $\delta=\infty$, oder nur δ allein $=\infty$, oder nur γ allein $=\infty$, so kann man sich in alleu drei Fällen die Reihe zur Rechten in's Unendliche fortgesetzt

denken, dadurch daß man $\mu = \infty$ sich denkt. — Diese unendliche Reihe kann nun nach §. 43. ebenfalls bald konvergent bald divergent seyn, und so kann dann auch das allgemeinere numerisch-bestimmte Integral $\int_{\alpha+\beta\cdot i}^{\gamma+\delta\cdot i} f\cdot dx$, in dem Falle, wo γ und δ beide, oder γ oder δ allein unendlich-groß werden, ein konvergentes oder ein divergentes heißen.

Ist das Integral divergent, so kann von ihm in der Rechnung nicht weiter die Rede seyn; ist dasselbe aber konvergent, so ist sein Werth, also der Werth der unendlichen Reihe zur Rechten in C (nach §§. 40. 41.), dem allgemein-bestimmten Integral

$$\int_{(\gamma+\delta\cdot i)\div(\alpha+\beta\cdot i)} f\cdot dx$$

für dieselben Werthe von γ und δ genommen, gleich.

Das Integral $\int_{\alpha+\beta\cdot i}^{\gamma+\delta\cdot i} f\cdot dx$ ist aber für $\gamma = \infty$, oder $\delta = \infty$, oder gleichzeitig $\gamma = \infty$ und $\delta = \infty$, nie konvergent, wenn nicht in der Reihe C zur Rechten das Integral $\int_{k_\nu}^{k_{\nu+1}} f\cdot dx$ für $\nu = \infty$ ein (reelles oder) imaginäres Unendlich-Kleines wird (s. §. 31.). — Umgekehrt dagegen kann dieses letztgenannte Ereigniß eintreten, ohne daß deshalb das vorstehende numerisch-bestimmte Integral unter den für γ und δ gemachten Voraussetzungen konvergent wird, d. h. also, ohne daß die unendliche Reihe zur Rechten in C deshalb nothwendig eine konvergente seyn müßte.

Endlich kann man in dem allgemeineren numerisch-bestimmten Integral

$$\int_{\alpha+\beta\cdot i}^{\gamma+\delta\cdot i} f\cdot dx$$

auch α oder β oder beide $=\infty$ oder $=-\infty$ sich denken, während γ und δ entweder endlich, oder ebenfalls beide oder eines davon unendlich-groß ist. — So wie die Integrale konvergent sind, richten sie sich genau nach denselben in den §. 36. — §. 38. aufgestellten Gesetzen, ob die Buchstaben α, β, γ, δ lauter reelle endliche Werthe oder zum Theil oder alle unendlich-große (reelle) Werthe vorstellen.

Schluß-Anmerkung.

Die verschiedenen Methoden der Auswerthung numerisch-bestimmter Integrale wollen wir in einer „dritten Abhandlung" einer Musterung unterwerfen. Wir werden dann sehen, wie sich selbst die Wege, auf denen Euler zu dem Werthe von $\int_0^\infty \frac{Sin\, x}{x} \cdot dx$ und Laplace zu dem Werthe von $\int_0^\infty Cos\, rx \cdot e^{-a^2x^2} \cdot dx$ (d. h. zur Zurückführung dieses Integrals auf dies andere $\int_0^\infty e^{-t^2} \cdot dt$) gelangt ist, und welche spätere Analysten für nicht zuläßig gehalten haben, völlig gerechtfertigt finden, und zur schnelleren Auffindung der Werthe neuer numerisch-bestimmter Integrale wohl benützt werden können, wenn sie nur mit Bewußtseyn verfolgt werden.

Auch glauben wir noch einmal wiederholen zu müssen, daß es Regel seyn muß, statt der numerisch-bestimmten Integrale die ihnen gleichen allgemein-bestimmten Integrale zu setzen, weil das Rechnen mit letzteren ganz allgemein statt finden kann.

Und um endlich in dieser letzteren Behauptung nicht mißverstanden zu werden, müssen wir auch noch wiederholen,

daß sowie o statt o^x gesetzt worden ist, oder o statt $\frac{1}{\infty}$, oder o statt $e^{-\infty}$, u. dergl., — mit einem Worte, so-

wie man für einen Ausdruck einen andern gesetzt hat, der ihm im Allgemeinen (d. h. gemäß des Verhaltens der Operationen zu einander) nicht gleich ist, sondern der nur unter gewissen Voraussetzungen statt des andern gesetzt werden konnte, — man sogleich keine allgemeinen (Form-) Gleichungen mehr hat, sondern nur Zahlen-Gleichungen, welche letzteren nicht mehr das bloße und ewig unabänderliche Verhalten der Operationen zu einander ausdrücken, sondern nur andeuten, daß die beiden Ausdrücke links und rechts vom (=) Zeichen eine und dieselbe reelle oder imaginäre Zahl von der Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ vorstellen. — In solchen Zahlen-Gleichungen müssen aber auch die vorkommenden unendlichen Reihen solche reelle oder imaginäre Zahlen vorstellen, und zu dem Ende müssen sie numerisch und deshalb auch konvergent gedacht werden.

Dies ist der Grund, warum man bei dem Arbeiten mit numerisch-bestimmten Integralen, und selbst auch mit allgemein-bestimmten, sobald eine der Grenzen (oder jede) unendlich-groß wird, — die vorkommenden unendlichen Reihen im erstern Falle allemal, im andern Falle häufig konvergent sich denken, und das mittelst ihrer erworbene Resultat, auch wenn solches keine unendliche Reihe mehr enthält, doch nur unter denselben Voraussetzungen als wahr ansehen darf, unter welchen die zur Herstellung desselben verbrauchten unendlichen Reihen konvergent gewesen sind.

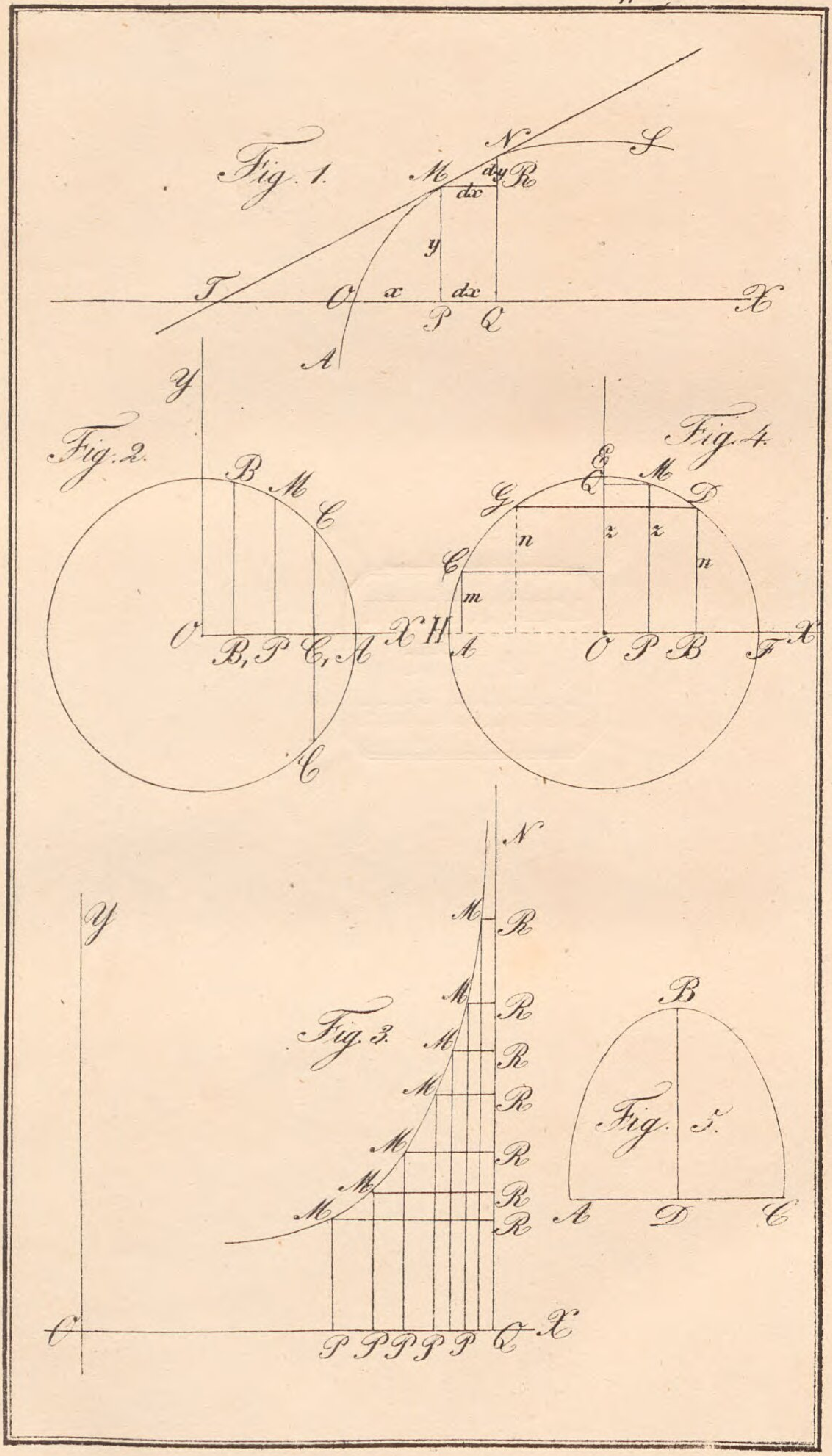
Fig. 1.
N
S
M
dy
R
dx
y
T
O
x
dx
X
P
Q
A
Y
Fig. 2.
B
M
C
O
B,
P
C,
A
X
C
Fig. 4.
E
Q
M
D
G
n
z
z
n
C
m
H
A
O
P
B
F
X
N
M
R
Y
Fig. 3.
B
Fig. 5.
A
D
C
O
P P P P P
Q
X

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ohm, Martin,

Der Geist der mathematischen Analysis und ihr Verhältniß zur Schule

Bd.: Abhandlung 2

Berlin 1846

Math.p. 382 fg-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082502-5